



APLIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL DALAM ESTIMASI JUMLAH POPULASI

Zuli Nuraeni^a

^a*STKIP Muhammadiyah Kuningan, zulinura@upmk.ac.id*

Abstract

This paper is a study of the theory and application of partial differential equations. The purpose of this study was to examine a concept and apply and implement in computational mathematics so as to facilitate and support aspects of life outside mathematics. Application of differential equations are widely used in everyday life one of which is to estimate the number of population in a region and a specific time by using the concept of differential equations. If the population grows or shed called $N(t)$, assuming that $P(t)$ is a function that can be derived with respect to time, so including a continuous function. Then assume that $\frac{dN}{dt}$, the rate of change in the number / proportion to total population exists, then $\frac{dN}{dt} = kN$ or $\frac{dN}{dt} - kN = 0$ where k is a constant proportion.

Keywords: Aplication of differential equation, estimate the population

1. Pendahuluan

Persamaan diferensial adalah persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih, yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde. Persamaan diferensial memegang peranan penting dalam rekayasa, fisika, ilmu ekonomi dan berbagai macam disiplin ilmu. Persamaan diferensial muncul dalam berbagai bidang sains dan teknologi, bilamana hubungan deterministik yang melibatkan besaran yang berubah secara kontinu dimodelkan oleh fungsi matematika dan laju perubahannya dinyatakan sebagai turunan diketahui atau dipostulatkan.

Salah satu aplikasi turunan dalam kehidupan sehari-hari adalah untuk mengkonstruksi model matematika dari fenomena perubahan dalam kehidupan sehari-hari yang melibatkan laju perubahan sesaat atau laju perubahan rata-rata. Persamaan diferensial merupakan dasar dalam pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Contohnya peluruhan zat radioaktif, pertumbuhan dan penyusutan populasi, pemanasan dan pendinginan, penguapan, perilaku arus listrik dalam suatu rangkaian listrik, gerak dalam medan gravitasi, dinamika harga pasar, pertumbuhan keuangan dan dinamika harga saham, pengaturan dosis obat, pembelahan sel dan sebagainya.

Persamaan diferensial biasa orde pertama merupakan persamaan diferensial yang paling sederhana bentuknya karena persamaan ini hanya mengandung turunan pertama dari fungsi yang tidak diketahui. Walaupun sederhana bentuknya, banyak fenomena dalam kehidupan sehari-hari yang sifatnya dapat dimodelkan sebagai persamaan diferensial orde pertama. Pembentukan model persamaan diferensial dibuat dengan mengasumsikan bahwa perubahan yang diamati sebanding (proporsional) terhadap variabel atau fungsi yang diduga. Dua besaran P dan Q dikatakan proporsional (yang satu sebanding dengan yang lain) jika salah satu besaran merupakan perkalian konstan dari besaran yang lain, misalkan $P = kQ$ untuk suatu konstanta k .

Misalkan $y = f(x)$ adalah fungsi yang dapat diturunkan pada $x \neq x_0$, maka $f'(x_0)$ merupakan laju perubahan dari y terhadap perubahan x pada titik $x \neq x_0$. Secara geometris, $f'(x_0)$

merupakan kemiringan garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di titik $(x_0, f(x_0))$. Interpretasi turunan sebagai laju perubahan sesaat merupakan konsep dasar yang digunakan dalam banyak aplikasi permodelan, sedangkan interpretasi geometris dari turunan sebagai kemiringan dari garis singgung pada suatu kurva sangat berguna untuk mengembangkan konstruksi solusi numerik. Dalam interpretasi ini, rasio

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

merupakan laju perubahan rata-rata fungsi $y = f(x)$ ketika x mengalami perubahan sebesar Δx .

Suatu persamaan diferensial linear orde satu adalah suatu persamaan yang berbentuk

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x). \quad (1.1)$$

Kita selalu memisahkan bahwa koefisien-koefisien $a_1(x)$, $a_0(x)$ dan fungsi $f(x)$ adalah fungsi-fungsi yang kontinu pada suatu selang I dan bahwa koefisien $a_1(x) \neq 0$ untuk semua x di dalam I . Jika kita bagi kedua ruas oleh $a_1(x)$ dan menetapkan

$$a(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)} \quad \text{dan} \quad b(x) = \frac{f(x)}{a_1(x)},$$

kita peroleh persamaan diferensial yang sepadan dengan (1.1) adalah

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (1.2)$$

dengan $a(x)$ dan $b(x)$ merupakan fungsi-fungsi x yang kontinu pada selang I .

Penyelesaian umum persamaan (1.2) dapat dicari secara eksplisit dengan memperhatikan bahwa perubahan peubah

$$w = ye^{\int a(x)dx} \quad (1.3)$$

memetakan persamaan (1.2) ke dalam persamaan diferensial terpisah. Jadi dengan mengingat bahwa

$$\frac{d}{dx} \left[\int a(x)dx \right] = a(x),$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} w' &= y'e^{\int a(x)dx} + y a(x)e^{\int a(x)dx} \\ &= [y' + a(x)y]e^{\int a(x)dx} \\ &= b(x)e^{\int a(x)dx}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Melihat banyaknya penerapan persamaan diferensial dalam kehidupan sehari-hari penulis membuat rangkuman dan contoh dari pemanfaatan aplikasi persamaan diferensial dalam mengestimasi jumlah populasi. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengkaji suatu konsep dan kemudian bisa diterapkan serta diimplementasikan dalam komputasi matematika sehingga memudahkan dan menunjang aspek-aspek kehidupan di luar matematika. Penerapan persamaan diferensial banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari salah satunya adalah untuk mengestimasi jumlah populasi pada suatu wilayah dan waktu tertentu dengan menggunakan konsep persamaan diferensial.

Penelitian Afnirina [1] mengenai aplikasi persamaan diferensial model populasi kontinu pada pertumbuhan penduduk di Jombang, menyimpulkan bahwa model populasi logistik lebih akurat dan lebih realistis daripada model populasi eksponensial untuk memprediksi jumlah penduduk Jombang pada sensus 2020. Pertumbuhan populasi merupakan suatu proses yang bersifat kontinu. Kontinu dalam hal ini berarti populasi bergantung waktu tanpa putus. Karenanya model matematika yang akan digunakan untuk memproyeksi populasi adalah model pertumbuhan populasi kontinu. Menurut Iswanto terdapat beberapa macam model pertumbuhan populasi yang kontinu diantaranya model populasi eksponensial dan model populasi logistik [2].

1.1. Model Pertumbuhan Eksponensial

Pada tahun 1798, Thomas Malthus membuat sebuah model pertumbuhan penduduk dasar yang terkenal dengan nama model pertumbuhan eksponensial. Untuk mengestimasi populasi makhluk hidup yang memiliki laju pertumbuhan konstan, anggaplah $P(t)$ melambangkan jumlah populasi yang bertumbuh atau luruh. Jika kita asumsikan bahwa $P(t)$ adalah suatu fungsi yang dapat diturunkan terhadap waktu, sehingga termasuk fungsi yang kontinu, maka asumsikan bahwa $\frac{dP}{dt}$, laju perubahan jumlah/populasi proporsional terhadap jumlah yang ada, maka $\frac{dP}{dt} = kN$ atau $\frac{dP}{dt} - kP = 0$, dimana k adalah konstanta proporsional. Untuk permasalahan populasi, dimana $P(t)$ pada kenyataannya adalah variabel diskrit bernilai integer (bilangan bulat), asumsi ini tidak tepat. Walaupun demikian konsep $\frac{dP}{dt} - kP = 0$ tetap memberikan perkiraan yang baik untuk hukum-hukum fisis yang mengatur sistem semacam itu [3].

Pada model ini diasumsikan bahwa populasi bertambah dengan laju pertumbuhan populasi yang sebanding dengan besarnya populasi. Misalkan $P(t)$ menyatakan jumlah populasi pada saat t (waktu), dan k menyatakan laju pertumbuhan populasi maka model populasi eksponensial dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{dP}{dt} = kP(t) \quad (1.5)$$

yang mana merupakan persamaan diferensial separabel, sehingga kita dapat mencari solusi umumnya sebagai berikut dengan cara berikut:

$$\begin{aligned} \int \frac{dP}{P} &= \int k dt \\ \ln P(t) &= kt + c \\ e^{\ln P(t)} &= e^{kt+c} \\ P(t) &= e^{kt+c}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Jika diberikan kondisi awal $t = 0$ dan $P(0) = P_0$ maka diperoleh nilai $c = \ln P_0$ sehingga bila nilai c disubstitusikan ke (1.6) menghasilkan

$$\begin{aligned} P(t) &= e^{kt+\ln P_0} \\ &= e^{kt} e^{\ln P_0} \\ &= P_0 e^{kt}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Persamaan (1.7) merupakan bentuk solusi khusus dari model pertumbuhan eksponensial. Dari persamaan tersebut dapat dilihat jika nilai k positif maka populasi akan meningkat secara eksponensial, sebaliknya jika nilai k negatif maka populasi akan semakin punah.

1.2. Model Pertumbuhan Logistik

Model ini pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan dan juga seorang ahli biologi berkebangsaan Belanda, yaitu Pierre Verhulst pada tahun 1838. Motivasi awal penelitian mengenai model ini adalah karena model pertumbuhan alami tidak cukup tepat untuk populasi yang cukup besar dan tempatnya terbatas sehingga menimbulkan kendala karena padatnya populasi yang akan mengurangi populasi itu sendiri [4]. Model pertumbuhan populasi logistik ini merupakan penyempurnaan dari model pertumbuhan eksponensial. Pada model ini jumlah populasi dipengaruhi oleh lingkungan seperti persediaan makanan. Model logistik mengasumsikan bahwa pada waktu tertentu jumlah populasi akan mendekati titik kesetimbangan (*equilibrium*). Pada titik ini jumlah kelahiran dan kematian dianggap sama sehingga grafiknya mendekati konstan.

Bentuk sederhana untuk laju pertumbuhan relatif yang mengakomodasi asumsi ini adalah

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = k \left(1 - \frac{P}{K}\right) \quad (1.8)$$

Jika dikalikan dengan P , maka diperoleh model untuk pertumbuhan populasi yang dikenal persamaan diferensial logistik, yaitu

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \quad (1.9)$$

Perhatikan bahwa dari persamaan (1.9) diperoleh bahwa jika P kecil dibandingkan dengan K , maka $\frac{P}{K}$ mendekati 0 dan $\frac{dP}{dt} \approx kP$. Namun, jika $P \rightarrow K$ (populasi mendekati kapasitas tampungnya), maka $\frac{P}{K} \rightarrow 1$, sehingga $\frac{dP}{dt} \rightarrow 0$. Jika populasi P berada diantara 0 dan K , maka ruas kanan persamaan di atas bernilai positif, sehingga $\frac{dP}{dt} \rightarrow 1$ dan populasi naik. Akan tetapi jika populasi melampaui kapasitas tampungnya ($P > K$), maka $1 - \frac{P}{K}$ negatif, sehingga $\frac{dP}{dt} < 0$ dan populasi turun. Solusi persamaan logistik dapat diperoleh melalui langkah-langkah berikut ini

$$\begin{aligned} \frac{dP}{P(1 - \frac{P}{K})} &= k dt \\ \int \frac{dP}{P(1 - \frac{P}{K})} &= \int k dt \\ \ln P - \ln(K - P) &= kt + c \\ \ln\left(\frac{P}{K - P}\right) &= kt + c \\ \left(\frac{P}{K - P}\right) &= e^{kt+c} \\ P &= \frac{Ke^{kt+c}}{1 + e^{kt+c}} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Dari persamaan (1.10) jika kita memberikan nilai awal $t = 0$ dan $P(0) = P_0$ kemudian disubstitusikan ke dalam (1.10) maka akan diperoleh nilai

$$c = \ln\left(\frac{P_0}{K - P_0}\right).$$

Selanjutnya nilai c tersebut disubstitusikan kembali ke dalam persamaan (1.10), sehingga diperoleh solusi khusus dari model logistik seperti berikut

$$\begin{aligned} P &= \frac{Ke^{kt+\ln(\frac{P_0}{K-P_0})}}{1 + e^{kt+\ln(\frac{P_0}{K-P_0})}} \\ &= \frac{Ke^{kt} \frac{P_0}{K-P_0}}{1 + e^{kt} \frac{P_0}{K-P_0}} \\ &= \frac{K}{\frac{K}{P_0}e^{-kt} - e^{-kt} + 1} \\ &= \frac{K}{e^{-kt}(\frac{K}{P_0} - 1) + 1}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

dengan:

P : jumlah populasi pada saat t

P_0 : jumlah populasi awal saat $t = 0$

K : daya tampung (*carrying capacity*) dari suatu daerah untuk populasi

k : laju pertumbuhan per kapita populasi

t : waktu.

Persamaan (1.11) merupakan bentuk sederhana dari solusi khusus model logistik yang akan digunakan dalam melakukan proyeksi penduduk suatu kota. Menurut [2], penentuan nilai K dapat dilakukan dengan cara *trial and error*, yaitu dengan cara mensubstitusikan perkiraan nilai K ke dalam model yang diperoleh hingga hasil yang diperoleh model mendekati jumlah populasi yang sebenarnya.

2. Metodologi Penelitian

Penelitian ini bersifat kajian teoritis mengenai aplikasi Persamaan Diferensial pada kehidupan sehari-hari. Metode penelitiannya dengan mengumpulkan beberapa sumber teori dari buku dan jurnal, kemudian ditarik sebuah benang merah sehingga diperoleh kesimpulan dan disertai contoh penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.

3. Perumusan Masalah

Pada penelitian ini, dibuat model pertumbuhan populasi Provinsi Maluku berdasarkan data jumlah penduduk Provinsi Maluku dari tahun 2010 hingga tahun 2015 dengan menggunakan model eksponensial dan logistik. Nilai K dilakukan dengan cara *trial and error*, yaitu dengan cara mensubstitusikan perkiraan nilai K ke dalam model yang diperoleh dari data pada tahun sebelumnya. Selanjutnya, dengan menggunakan model yang diperoleh, diprediksi jumlah penduduk Provinsi Maluku pada tahun 2020.

4. Pembahasan

Data pada Tabel 2 menyatakan jumlah penduduk Provinsi Maluku dari tahun 2010-2015.

Tabel 1. Jumlah Penduduk Provinsi Maluku

Tahun	Jumlah Penduduk
2010	551.018
2011	613.388
2012	897.951
2013	1.157.878
2014	1.149.899
2015	1.531.402

Pembuatan model pertumbuhan populasi Provinsi Maluku didasarkan pada model pertumbuhan eksponensial dan logistik.

4.1. Penyelesaian Model Eksponensial Pertumbuhan Populasi

Dari Tabel 2 di atas terlihat bahwa sejak tahun 2010-2015 jumlah penduduk kota tersebut mengalami kenaikan. Secara umum jika kita bandingkan jumlah penduduk pada awal tahun dan akhir tahun maka telah terjadi kenaikan jumlah penduduk di kota tersebut. Berikut estimasi jumlah populasi dengan penyelesaian menggunakan perhitungan model pertumbuhan eksponensial. Dalam hal ini, kita bisa menggunakan konsep $\frac{dN}{dt} - kP = 0$ dengan terlebih dahulu mencari nilai k (konstanta proporsional) dan anggaplah jumlah penduduk pada tahun 2010 adalah nilai P_0 (populasi awal, yaitu populasi pada tahun 2010) dan $P(t)$ melambangkan jumlah penduduk setelah t tahun dari tahun 2010. Dengan demikian, Tabel 2 dapat juga dinyatakan sebagai berikut:

Tabel 2. Jumlah Penduduk Provinsi Maluku

Tahun ke- t	$P(t)$
$t = 0$	551.018
$t = 1$	613.388
$t = 2$	897.951
$t = 3$	1.157.878
$t = 4$	1.149.899
$t = 5$	1.531.402

Untuk melakukan proyeksi penduduk suatu kota perlu dilakukan analisis perhitungan terlebih dahulu terhadap data jumlah penduduk suatu kota pada tahun-tahun sebelumnya. Hal ini dimaksudkan agar kita dapat mengetahui kecenderungan dan arah dari data yang kita gunakan [5, hal. 53]. Jumlah data yang digunakan turut mempengaruhi keakuratan model dalam memprediksi keadaan populasi secara menyeluruh.

Solusi masalah pertumbuhan populasi tersebut secara eksponensial adalah persamaan (1.7), yaitu $P(t) = P_0 e^{kt}$. Untuk mencari nilai k , disubstitusikan $t = 1$ dan $P(1) = 613.388$ yang merupakan jumlah penduduk di tahun 2011, sehingga diperoleh

$$613.388 = P_0 e^k. \quad (4.1)$$

Selanjutnya, disubstitusikan juga untuk nilai $t = 5$, sehingga diperoleh

$$1.531.402 = P_0 e^{5k}. \quad (4.2)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (4.1) dan (4.2), maka diperoleh nilai

$$k = 0,228735.$$

Dengan demikian, kita dapat mengestimasi jumlah penduduk pada tiap tahun dengan jumlah penduduk pada tahun 2010 sebagai P_0 ke dalam persamaan

$$P(t) = 613.388 \times e^{0,228735t}. \quad (4.3)$$

Sebagai contoh, estimasi jumlah penduduk pada tahun 2020 adalah $P(10)$, yaitu

$$P(10) = 613.388 \times e^{0,228735(10)} = 6.041.138.$$

Jadi estimasi jumlah penduduk kota tersebut pada tahun 2020 dengan menggunakan model eksponensial adalah sekitar 6.041.138 jiwa.

4.2. Penyelesaian Model Logistik Pertumbuhan Populasi

Untuk menentukan model logistik dari data jumlah penduduk Provinsi Maluku pada Tabel 12, sebelumnya diperhatikan terlebih dahulu bahwa karena jumlah penduduk Provinsi Maluku sejak tahun 2010-2015 masih berada dibawah 2.000.000 maka diasumsikan nilai kapasitas tampungnya yaitu $K = 2.000.000$, sehingga jika nilai $P(0)$ dan nilai K disubstitusikan ke dalam persamaan (1.11) akan diperoleh :

$$P(t) = \frac{2.000.000}{(2,62965)e^{-kt} + 1} \quad (4.4)$$

Selanjutnya dari persamaan (4.4) akan dicari model logistik yang dapat mewakili laju pertumbuhan penduduk Provinsi Maluku. Untuk $t = 1$, maka $P(1) = 613.388$, jika disubstitusikan ke persamaan (4.4) diperoleh:

$$613.388 = \frac{2.000.000}{(2,62965)e^{-k} + 1}, \quad \text{atau}$$

$$k = 0,15123.$$

Nilai k yang diperoleh disubstitusikan kembali pada (4.4) dan diperoleh Model Logistik Pertama, yaitu

$$P(t) = \frac{2.000.000}{(2,62965)e^{-0,15123t} + 1} \quad (4.5)$$

Selanjutnya, nilai $t = 2$ dan $P(2) = 897.951$ juga dimasukkan ke dalam (4.4), sehingga diperoleh nilai

$$k = 0,38102,$$

dan Model Logistik Kedua, yaitu

$$P(t) = \frac{2.000.000}{(2,62965)e^{-0,38102t} + 1}. \quad (4.6)$$

Cara yang sama digunakan untuk $t = 3, 4, 5$ sehingga diperoleh Model Logistik Ketiga, Keempat dan Kelima, yaitu berturut-turut:

$$P(t) = \frac{2.000.000}{(2,62965)e^{-0,428423t} + 1}. \quad (4.7)$$

$$P(t) = \frac{2.000.000}{(2,62965)e^{-0,36936t} + 1}. \quad (4.8)$$

$$P(t) = \frac{2.000.000}{(2,62965)e^{-0,430208t} + 1}. \quad (4.9)$$

Selanjutnya akan dihitung jumlah penduduk Provinsi Maluku dari tahun 2010-2015 yang dihasilkan dari kelima model di atas, kemudian akan dianalisis model yang memberikan hasil yang cukup signifikan bila dibandingkan dengan hasil sensus penduduk. Tabel 3 memuat hasil perhitungan jumlah penduduk berdasarkan lima model logistik di atas.

Tabel 3. Perbandingan Jumlah Penduduk antara Hasil Sensus dan Hasil Estimasi Model

Tahun	Hasil Sensus	Hasil Model				
		Model I	Model II	Model III	Model IV	Model V
2010	551.018	551.017	551.017	551.017	551.017	551.017
2011	613.388	613.388	715.184	737.105	709.836	725.411
2012	897.951	679.508	897.951	945.050	886.427	919.956
2013	1.157.878	748.906	1.087.877	1.157.873	1.070.497	1.120.797
2014	1.249.899	820.985	1.271.622	1.356.975	1.249.889	1.312.212
2015	1.531.402	895.038	1.437.492	1.528.185	1.413.623	1.481.242

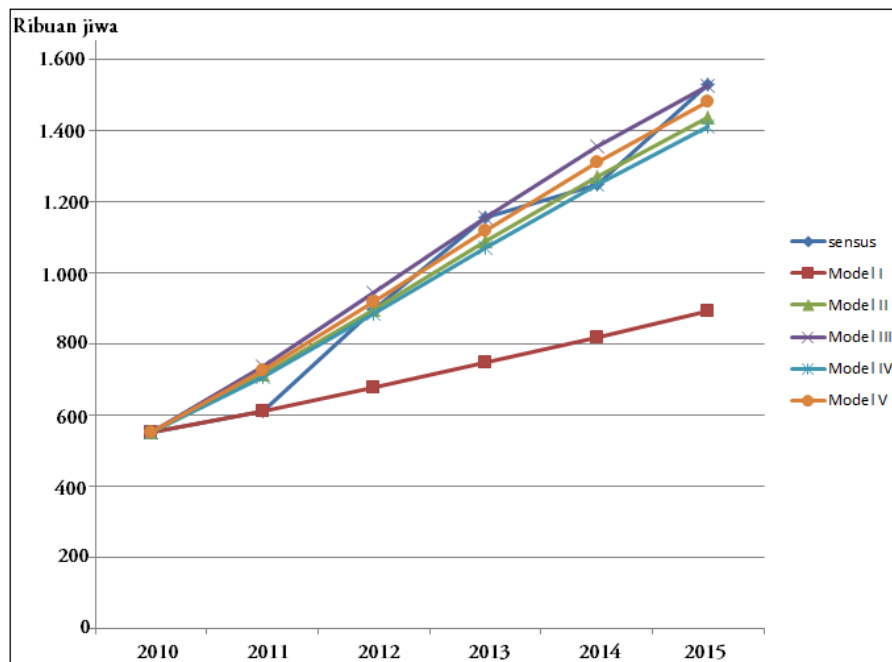
Jika perbandingan jumlah penduduk Provinsi Maluku antara hasil sensus dan hasil model pada Tabel 3 ditampilkan dalam bentuk grafik, maka akan terlihat seperti di bawah ini.

Berdasarkan grafik jumlah penduduk Provinsi Maluku yang dihasilkan oleh kelima model di atas, Model Logistik Ketiga memberikan hasil yang cukup mendekati hasil sensus. Selain itu keakuratan Model Logistik Ketiga cukup baik, hal ini dapat dilihat dari hasil jumlah penduduk Provinsi Maluku pada tahun 2015 yang dihasilkan Model Logistik Ketiga hampir sama dengan hasil sensus penduduk 2015. Selanjutnya, Model Logistik Ketiga digunakan untuk memprediksi jumlah penduduk Provinsi Maluku pada tahun 2020.

Dengan mensubstitusikan $t = 10$ pada (4.7), diperoleh

$$P(10) = \frac{2.000.000}{(2,62965)e^{-0,428423(10)} + 1} = 1.930.061.$$

Dengan demikian, diprediksi jumlah penduduk Provinsi Maluku pada tahun 2020 adalah 1.930.061 jiwa.



Gambar 1. Jumlah Penduduk Kota Berdasarkan Hasil Sensus dan Hasil Model

5. Kesimpulan dan Saran

Persamaan diferensial dapat diterapkan dalam berbagai bidang. Dalam pengestimasian jumlah populasi dapat dikomputasi dengan dua model yaitu model pertumbuhan eksponensial dan model pertumbuhan logistik. Model pertumbuhan logistik lebih akurat daripada model pertumbuhan eksponensial, karena model pertumbuhan logistik merupakan penyempurnaan dari model pertumbuhan eksponensial. Bentuk persamaan model pertumbuhan eksponensial adalah $P(t) = P_0 e^{kt}$. Sedangkan bentuk persamaan model pertumbuhan logistik adalah

$$P = \frac{K}{(e^{-kt}(\frac{K}{P_0} - 1) + 1)}.$$

Aplikasi persamaan diferensial baik model pertumbuhan eksponensial dan model pertumbuhan logistik dapat diterapkan juga dalam bidang yang lain, seperti dalam bidang perbankan untuk menghitung saldo tabungan dengan perhitungan bunga majemuk. Sebaiknya untuk mengestimasi jumlah populasi disarankan menggunakan model pertumbuhan logistik yang lebih akurat, karena model pertumbuhan logistik lebih mendekati jumlah populasi berdasarkan sensus yang sebenarnya.

Pustaka

- [1] Afnirina, *Aplikasi Persamaan Diferensial Model Populasi Kontinu Pada Pertumbuhan Penduduk Jombang*, Jurnal STKIP PGRI Jombang.
- [2] R. J. Iswanto, *Pemodelan Matematika (Aplikasi dan Terapannya)*, Graha Ilmu, Yogyakarta, 2012.
- [3] R. Bronson, G. Costa, *Teori dan Soal-soal Persamaan Diferensial (Ed. Ketiga)*, Erlangga, Jakarta, 2007.
- [4] D. A. Ngilawajan, *Model Matematika Untuk Penangkapan Ikan Pada Budidaya Ikan*, Buletin Pendidikan Matematika Vol. 10 No. 1 (2010) 60–67.
- [5] L. Khakim, *Proyeksi Penduduk Provinsi DKI Jakarta dan Kota Surabaya Dengan Model Pertumbuhan Logistik*, Jurnal Mahasiswa Matematika Universitas Brawijaya Vol. 1 No. 3 (2013) 52–55.