

## Local Stability of Predator Prey Models With Harvesting On The Prey

Oleh :  
Saiful Marom  
Pendidikan Matematika FKIP  
Universitas Pekalongan

### Abstract

In this paper considered the dynamics of a predator prey model with threshold harvesting on the prey. Theoretical and numerical methods are used to investigate boundedness of solutions, existence of equilibrium points, and the local stability of equilibrium points.

**Key words** : predator prey models, boundedness of solution, local stability.

### PENDAHULUAN

Eksplorasi terhadap populasi biologis dan ekosistem perairan sering terjadi saat ini, salah satunya di dunia perikanan. Perikanan merupakan salah satu sumber daya alam yang dapat diperbaharui, tetapi kepunahan mungkin dapat terjadi. Hal ini disebabkan karena kecanggihan alat penangkapan ikan dan peningkatan penangkapan ikan yang dilakukan manusia. Untuk mengantisipasi hal tersebut maka kegiatan eksploitasi ikan atau pemanenan ikan dapat dilakukan ketika banyak populasi ikan yang akan dipanen lebih dari ambang batas pemanenan tertentu. Ketika banyaknya populasi ikan tersebut kurang dari ambang batas pemanenan tertentu maka tidak dilakukan pemanenan atau tidak dilakukan eksploitasi.

Persoalan-persoalan semacam ini secara matematika dapat dimodelkan dengan menambahkan asumsi-asumsi sehingga untuk mempermudah dalam pemodelan dan tidak menjauhkan dengan kondisi yang sesungguhnya.

### 1. Model Matematika

Diberikan model mangsa pemangsa dengan fungsi respon bergantung mangsa dengan pemanenan pada mangsa :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \frac{axy}{(1+mx)} - H(x) \\ \frac{dy}{dt} &= y \left( -\tilde{d} + \frac{bx}{(1+mx)} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

$$x(0) = x_0 > 0 \text{ dan } y(0) = y_0 > 0.$$

$$\text{Dengan : } H(x) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x \leq T \\ h(x-T) & \text{jika } x > T \end{cases}$$

$x$  adalah kepadatan populasi mangsa,  $y$  adalah angka kepadatan populasi

pemangsa,  $a$  adalah angka penurunan mangsa karena ditangkap pemangsa.  $b$  adalah angka pertumbuhan populasi pemangsa,  $m$  adalah tingkat respon dari mangsa saat ingin dimangsa,  $\tilde{d}$  angka kematian populasi pemangsa tanpa pengaruh lingkungan,  $h$  adalah angka pemanenan mangsa,  $T$  adalah ambang batas untuk dilakukan pemanenan mangsa. Semua parameter bernilai positif.

**2. Keterbatasan Solusi**

Untuk mengetahui apakah banyaknya populasi mangsa dan pemangsa terbatas atau tidak menuju tak hingga, maka sebelum model diselidiki kestabilannya terlebih dahulu diselidiki keterbatasan solusinya. Selanjutnya akan diberikan sebuah teorema mengenai keterbatasan solusi dari model (1):

**Teorema 2.1** Semua solusi sistem (1) yang berada di dalam  $R_+^2$  adalah terbatas.

Selanjutnya akan dicari titik ekuilibrium dari model tersebut. Titik ekuilibrium atau titik keseimbangan merupakan suatu titik dimana tidak terjadi perubahan banyak populasi mangsa dan pemangsa terhadap waktu. Berikut diberikan teorema mengenai titik ekuilibrium dari model (1):

**Teorema 2.2** Titik ekuilibrium sistem (1) adalah sebagai berikut :

a. Jika  $y = 0$  maka model

(1) mempunyai titik ekuilibrium  $P_1(x, y) = (1, 0)$ .

Jika  $x \neq 0$  dan  $y \neq 0$  maka model

(1) mempunyai titik ekuilibrium

$$P_2(x, y) = \left( \frac{\tilde{d}}{b - \tilde{d}m}, \frac{b}{a} \left( \frac{b - \tilde{d}m - \tilde{d}}{(b - \tilde{d}m)^2} \right) \right)$$

b. Jika  $y = 0$  maka model (1) mempunyai titik ekuilibrium

$$P_3(x, y) = (x^*, 0), \text{ dengan}$$

$$x^* = \frac{(1-h) + \sqrt{(1-h)^2 + 4ht}}{2}$$

c. Jika  $x \neq 0$  dan  $y \neq 0$  maka model (1) mempunyai titik ekuilibrium

$$P_4(x, y) = \left( \frac{\tilde{d}}{b - \tilde{d}m}, \frac{(1+mx)(x(1-x) - h(x-T))}{ax} \right)$$

dengan  $b > \tilde{d}m$  dan  $x(1-x) > h(x-T)$ .

Selanjutnya, berdasarkan Teorema Linearisasi Hortman-Grobman karena sistem pada model tersebut nonlinear maka sistem pada model tersebut dilinearkan. Berikut diberikan matriks linearisasinya :

**Lemma 2.1** Matriks linearisasi dari model (1) untuk  $x \leq T$  di sekitar titik  $P(x, y)$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 - 2x - \frac{ay}{(1+mx)^2} & -\frac{ax}{1+mx} \\ \frac{by}{(1+mx)^2} & -\tilde{d} + \frac{bx}{1+mx} \end{bmatrix}$$

**Lemma 2.2.** Matriks linearisasi dari model (1) untuk  $x > T$  disekitar titik  $P(x, y)$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 - 2x - \frac{ay}{(1+mx)^2} - h & -\frac{ax}{1+mx} \\ \frac{by}{(1+mx)^2} & -\tilde{d} + \frac{bx}{1+mx} \end{bmatrix}$$

Kemudian model tersebut diselidiki kestabilan lokalnya dengan menggunakan matriks linierisasinya.

### 3. Kestabilan Lokal

Selanjutnya akan diselidiki apakah titik ekuilibrium dari model tersebut stabil asimtotik lokal atau tidak. Berikut diberikan teorema-teorema yang membahas tentang kestabilan lokal titik ekuilibrium dari model (1).

**Teorema 3.3** Pada sistem (1) mempunyai titik ekuilibrium  $P_1(x, y)$ , jika  $b < \tilde{d}(1+m)$  maka titik  $P_1(x, y)$  stabil asimtotik lokal.

**Teorema 3.4** Pada sistem (1) mempunyai titik ekuilibrium  $P_2(x, y)$  dengan :

$$\Delta = \frac{(b\tilde{d}m - b\tilde{d} - \tilde{d}^2m - \tilde{d}^2m^2)^2}{b^2(b - \tilde{d}m)^2} - \frac{4(b\tilde{d} - \tilde{d}^2m - \tilde{d}^2)}{b}$$

a. Jika  $\Delta \geq 0$ ,  $b > \tilde{d}(m+1)$ , dan

$$b < \tilde{d} \frac{m(m+1)}{(m-1)}$$

stabil asimtotik lokal.

b. Jika  $\Delta \geq 0$ ,  $b > \tilde{d}(m+1)$ , dan

$$b > \tilde{d} \frac{m(m+1)}{(m-1)}$$

stabil.

c. Jika  $\Delta < 0$ ,  $b > \tilde{d}(m+1)$ , dan

$$b < \tilde{d} \frac{m(m+1)}{(m-1)}$$

stabil asimtotik lokal.

d. Jika  $\Delta < 0$ ,  $b > \tilde{d}(m+1)$ , dan

$$b > \tilde{d} \frac{m(m+1)}{(m-1)}$$

stabil.

**Teorema 3.5** Pada sistem (1) mempunyai

titik ekuilibrium  $P_3(x, y)$ . Jika  $T > \frac{1}{2}$  dan

$$x^* < \frac{\tilde{d}}{(b - \tilde{d}m)}$$

maka  $P_3(x, y)$  stabil asimtotik lokal.

**Teorema 3.6** Pada sistem (1) mempunyai

titik ekuilibrium  $P_4(x, y)$  dengan :

$$A = (x(1-x) - h(x-T)), B = (1+mx)x, E = \frac{A}{B} + h$$

a. Jika  $\left( \frac{(b - \tilde{d}m)(1-E) - 2\tilde{d}}{b - \tilde{d}m} \right)^2 > \left( \frac{4A\tilde{d}}{B} \right)$ ,

$$(b - \tilde{d}m)(1-E) > 2\tilde{d}, \text{ dan } \frac{A\tilde{d}}{B} > 0,$$

maka titik ekuilibrium  $P_4(x, y)$  tidak stabil.

b. Jika  $\left( \frac{(b - \tilde{d}m)(1-E) - 2\tilde{d}}{b - \tilde{d}m} \right)^2 > \left( \frac{4A\tilde{d}}{B} \right)$ ,

$$(b - \tilde{d}m)(1-E) < 2\tilde{d}, \text{ dan } \frac{A\tilde{d}}{B} > 0,$$

maka titik ekuilibrium  $P_4(x, y)$  stabil asimtotik lokal.

c. Jika  $\left(\frac{(b-\tilde{d}m)(1-E)-2\tilde{d}}{b-\tilde{d}m}\right)^2 < \left(\frac{4A\tilde{d}}{B}\right)$ ,

$(b-\tilde{d}m)(1-E) > 2\tilde{d}$ , dan  $\frac{A\tilde{d}}{B} > 0$ ,

maka titik ekuilibrium  $P_4(x, y)$  tidak stabil.

d. Jika  $\left(\frac{(b-\tilde{d}m)(1-E)-2\tilde{d}}{b-\tilde{d}m}\right)^2 < \left(\frac{4A\tilde{d}}{B}\right)$ ,

$(b-\tilde{d}m)(1-E) < 2\tilde{d}$ , dan  $\frac{A\tilde{d}}{B} > 0$ ,

maka titik ekuilibrium  $P_4(x, y)$  stabil asimtotik lokal.

Selanjutnya, diberikan simulasi numerik pada model (1) untuk melihat visualisasi kestabilannya.

**4. Simulasi Numerik**

Simulasi numerik ini menggunakan software mathematica 8.

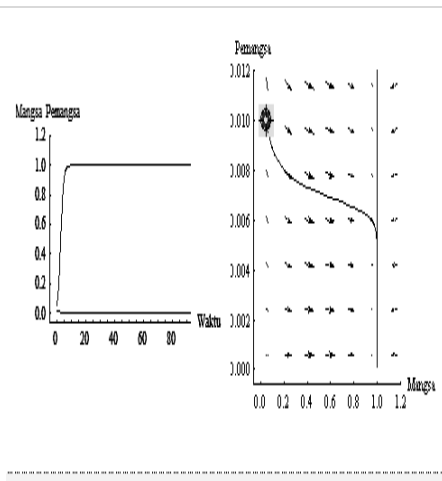
Untuk titik  $P_1(x, y)$  akan Diberikan parameter-parameter:

$a = 1, b = 0.9, d = 0.2, m = 5$ , dan waktu  $1, 2, \dots, 200$  satuan waktu. (**Gambar 1**)

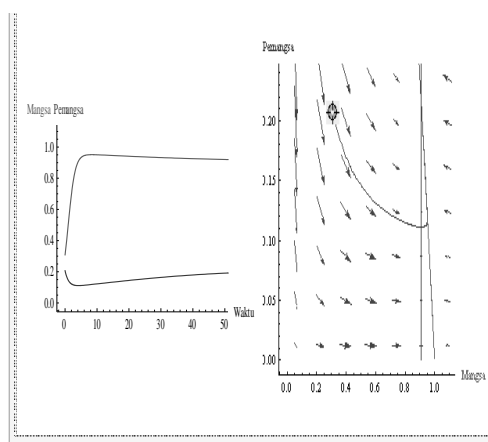
Untuk titik  $P_2(x, y)$  akan Diberikan parameter-parameter:

$a = 1, b = 2.6, d = 1, m = 1.5$ , dan waktu  $1, 2, \dots, 200$  satuan waktu.

(**Gambar 2**)



**Gambar 1**



**Gambar 2.**

**SIMPULAN dan SARAN**

**Simpulan**

Dari model mangsa-pemangsa tersebut dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Solusi sistem (1) yang berada di dalam  $R_+^2$  terbatas.
2. Titik ekuilibrium sistem (1) adalah pada **Teorema 2.2.**
3. Banyaknya populasi mangsa dan pemangsa akan seimbang ketika memenuhi **Teorema 2.2.**
4. Titik ekuilibrium dikatakan sistem (1) stabil asimtotik lokal atau tidak stabil

ketika memenuhi **Teorema 3.3, Teorema 3.4, Teorema 3.5, dan Teorema 3.6.**

### Saran

Dengan adanya keterbatasan penulis sehingga yang tertarik bisa mengembangkan model ini dengan membahas masalah kestabilan global, masalah bifurkasi, mengembangkan model tersebut dengan memodifikasi fungsi pemanenan, menambahkan simulasi numerik dengan menggunakan program lainnya sehingga bisa lebih mudah untuk melihat simulasi numeriknya.

### Daftar Pustaka

- Asfaw, T. M., 2009, *Dynamics of generalized time dependent predator-prey model with nonlinear harvesting*, Int. J. Math. Anal. **3**, 1473–1485.
- Birkhoff, H. and Rota, G.C., 1989, *Ordinary Differential Equations*, 4<sup>th</sup> Edition, John Wiley & Sons, Inc, New - York, USA.
- Blanchard, P., Devaney, R.L. and Hall, G.R., 2006, *Differential Equations*, Thomson Brooks/Cole, Belmont.
- Bohn, J., Rebaza, J., and Speer, K., 2011, *Continuous Threshold Prey Harvesting in Predator-Prey Models*, International

Journal of Computational and Mathematical Science., 1, 111-118.

Ginzburg, L.R., Akcakaya, H.R. and Arditi, R., 1995, *Ratio-Dependent Predation: An Abstraction that Works*, Ecology, 76, 995-1004.

Khalil, H.K., 2002, *Nonlinear Systems*, 3<sup>rd</sup> edition, Prentice Hall, New Jersey, USA.

Leard, B., Lewis, C. and Rebaza, J., 2008, *Dynamics of Ratio-Dependent Predator-Prey Models with Nonconstant Harvesting*, Disc. Cont. Dyn. Syst. S, 1, 303-315.

Lynch, S., 2010, *Dynamical Systems with Applications Using Maple*, Birkhauser, Boston.

Perko, L., 2001, *Differential Equations and Dynamical Systems*. Texts in Applied Mathematics Vol. 7, Springer – Verlag, New – York, USA.

Ross, S.L., 1984, *Differential Equations*, 3<sup>th</sup> Edition, John Wiley & Sons, Inc, New - York, USA.

Tu, Pierre, N.V., 1994, *Dynamical System : a introduction with application in Economis and Biology*, Springer – Verlag, New-York, USA.

Verhulst, F., 1990, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer – Verlag, New- York, USA.

Xiao, D. and Ruan, S., 2001, *Global Dynamics of A Ratio-Dependent Predator-Prey System*, J. Math. Biol., 43, 268-290.