Teorema Titik Tetap Fungsi Demicontinuous Hampir Lipschitzian di Ruang Hilbert

Muhamad Najibufahmi[a], Nurul Aini[b]
[a]Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UNIKAL
Jalan Sriwijaya No 3 Pekalongan, muhamadnajibufahmi@yahoo.com
[b]Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UNIKAL
Jalan Sriwijaya No 3 Pekalongan, nurul.aini00@yahoo.co.id

ABSTRAK

Tujuan paper ini adalah membangun teorema titik tetap untuk fungsi hampir Lipschitzian di ruang Hilbert dengan menggunakan ide pembuktian yang berbeda dibandingkan dengan Sahu (2005). Diberikan U himpunan bagian dari ruang Hilbert H dan $T: U \longrightarrow U$ fungsi *demicontinuous* hampir Lipschitzian. Pertama, ditunjukkan jika ada himpunan tertutup C dari U sehingga $\bigcap_n \overline{co}\{T^m(x) : m \geq n\} \subseteq C$ untuk semua $x \in U$, maka fungsi T, dengan $\limsup_n k_n < \sqrt{2}$, mempunyai titik tetap. Selanjutnya, teorema masih valid meskipun kita perlemah syarat cukupnya menjadi $\bigcap_n \overline{co}\{T^m(x) : m \geq n\} \subseteq U$ untuk suatu $x \in U$, asalkan $\limsup_n k_n \leq 1$. Hasil pada paper ini memperumum hasil dari Browder (1965) sekaligus Yao (2012).

Kata kunci. Titik tetap, ruang Hilbert, fungsi hampir Lipschitzian, *demicontinuous*

ABSTRACT

The purpose of this paper is to establish fixed point theorems for nearly Lipschitzian mappings in Hilbert spaces, by using the different idea than Sahu (2005). Let U be a nonempty subset of Hilbert space H and let $T: U \longrightarrow U$ be a demicontinuous nearly Lipschitzian mapping. We first show that if there exists a closed subset C of U such that $\bigcap_n \overline{co}\{T^m(x) : m \geq n\} \subseteq C$ for all $x \in U$, then T with $\limsup_n k_n < \sqrt{2}$ has a fixed point. Next, we prove that the theorem is still valid even we replace the assumption with $\bigcap_n \overline{co}\{T^m(x) : m \geq n\} \subseteq U$ for some $x \in U$ if $\limsup_n k_n \leq 1$. These results are the generalization of Browder (1965) and so Yang (2012)

Keywords. Fixed points, Hilbert spaces, nearly Lipschitzian mappings, demicontinuous

Pendahuluan

Pada paper ini, H menotasikan ruang Hilbert dengan hasil kali dalam membangkitkan norma $\|.\|$. Diberikan U himpunan bagian dari ruang Hilbert H. Diperhatikan kembali, fungsi $T: U \longrightarrow U$ dikatakan Lipschitzian apabila untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ ada $k_n > 0$ sehingga

$$\|T^n(x) - T^n(y)\| \leq k_n\|x - y\|$$

untuk semua $x, y \in U$. Apabila $k < 1$ maka fungsi T dikatakan kontraksi (*contraction*). Untuk $k = 1$, fungsi T dikatakan nonekspansif (*nonexpansive*).

Teorema titik tetap fungsi kontraksi dikenalkan oleh S. Banach (Sahu, 2005). Teorema tersebut dapat diaplikasikan pada bidang persamaan linear, persamaan diferensial, dan persamaan integral (Kreyszig, 1978). Pada tahun 1965, F.E. Browder mengenalkan teorema titik tetap fungsi nonekspansif di ruang Hilbert sebagai berikut.

Teorema 1.1 (Browder, 1965 dan Yang, 2012)**.** *Diberikan U himpunan bagian terbatas, tertutup, dan konveks dari ruang Hilbert H. Untuk setiap fungsi nonekspansif* $T: U \longrightarrow U$ *mempunyai titik tetap*.

Dengan menggunakan langkah pembuktian yang berbeda, C. Yang berhasil memberikan hasil yang sama (Yang, 2012). Aplikasi titik tetap fungsi nonekspansif dapat terapkan pada bidang *image recovery*, *convex feasibility problem*, dan *signal processing problem*, yang dapat dilihat di Byrne (2004), Combettes (1996), dan Kitahara dan Takahashi (1993) (Suantai dan Puengrattana, 2014).

Sampai saat ini banyak penulis yang telah berhasil membangun jenis-jenis fungsi sebagai perumuman fungsi Lipschitzian beserta dengan titik tetapnya. Diantaranya adalah Sahu (2005) yang mengenalkan pengertian fungsi hampir Lipschitzian (pembaca dapat pula melihat Kirk (1974) dan Bruck, dkk (1993) untuk mengetahui jenis fungsi lainnya). Perlu diperhatikan, semua titik tetap yang dikenalkan oleh Sahu (2005) hanya untuk beberapa jenis fungsi hampir Lipschitzian (titik tetap untuk fungsi hampir *k*-Lipschitzian seragam, dengan $k > 1$ belum dapat dijamin). Dengan membangun teorema titik tetap fungsi tersebut, D.R. Sahu memperumum hasil dari Banach (1922) dan Weissinger (1958) (Sahu (2005)). Jadi, terdapat *open problem* untuk menemukan eksistensi titik tetap untuk **semua** jenis fungsi *demicontinuous* hampir Lipschitzian T untuk konstanta hampir Lipschitz $\eta(T^n)$ dengan $1 < \eta(T^n) < \delta$ (δ konstanta yang akan ditentukan pada syarat cukup setiap hasil pada paper ini).

Tujuan dari paper ini adalah melanjutkan penelitian dalam mencari eksistensi titik tetap fungsi hampir Lipschitzian. Berbeda dengan Sahu (2005), domain fungsi pada paper ini tidak diharuskan konveks dan tertutup, dan fungsi yang digunakan bersifat lebih umum, meskipun ruang kerja paper ini lebih terbatas. Diberikan U himpunan bagian dari ruang Hilbert H dan $T: U \longrightarrow U$ fungsi *demicontinuous* hampir Lipschitzian. Pertama, ditunjukkan jika ada himpunan tertutup C dari U sehingga $\bigcap_n \overline{co}\{T^m(x) : m \geq n\} \subseteq C$ untuk semua

$x \in U$, maka fungsi T, dengan $\limsup_n k_n < \sqrt{2}$, mempunyai titik tetap. Selanjutnya, teorema masih valid meskipun kita perlemah syarat cukupnya menjadi $\bigcap_n \overline{co}\{T^m(x) : m \geq n\} \subseteq U$ untuk suatu $x \in U$, asalkan $\limsup_n k_n \leq 1$. Hasil pada paper ini memperumum hasil dari Browder (1965) sekaligus Yang (2012).

Metode Penelitian

Metode yang digunakan pada paper ini adalah studi pustaka. Penulis membaca, menelaah, dan merumuskan masalah dari literatur-literatur yang terkait teori titik tetap untuk fungsi bertipe Lipschitzian. Selanjutnya penulis mempelajari konsep ruang Hilbert dan berhasil menemukan ide untuk membangun teorema titik tetap untuk fungsi hampir Lipschitzian di ruang Hilbert. Ide tersebut diperoleh dengan melakukan sedikit modifikasi pada langkah pembuktian beberapa teorema titik tetap bersama untuk keluarga fungsi Lipschitzian di ruang Banach. Pembaca dapat melihat Ishihara dan Takahashi (1987) dan Ishihara (1989) untuk mengetahui ide tersebut.

Landasan Teori

Diberikan U himpunan bagian dari ruang Hilbert H dan barisan $\{a_n\}$ di $[0, \infty)$ dengan $a_n \to 0$. Mengikuti Sahu (2005), fungsi $T: U \longrightarrow U$ dikatakan *hampir Lipschitzian relatif terhadap* (*nearly* Lipschitzian *with respect to*) $\{a_n\}$ apabila untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ terdapat $k_n \geq 0$ sehingga

$$\|T^n(x) - T^n(y)\| \leq k_n(\|x - y\| + a_n)$$

untuk semua $x, y \in U$.

Bilangan terkecil k_n sehingga pertidaksamaan di atas berlaku dinotasikan dengan $\eta(T^n)$ dan disebut konstanta hampir Lipschitz (*nearly* Lipschitz *constant*). Mengikuti Sahu (2005), fungsi hampir Lipschitzian T dengan barisan $\{(a_n, \eta(T^n))\}$ dikatakan,

(i) hampir kontraksi (*nearly contraction*) jika $\eta(T^n) < 1$ untuk semua $n \geq 1$.

(ii) hampir nonekspansif (*nearly nonexpansive*) jika $\eta(T^n) \leq 1$ untuk semua $n \geq 1$.

(iii) hampir *asymptotically* nonekspansif jika $\eta(T^n) \geq 1$ untuk semua $n \geq 1$ dan $\lim_{n\to\infty} \eta(T^n) \leq 1$.

(iv) hampir k-Lipschitzian seragam (*nearly uniformly* k-Lipschitzian) jika $\eta(T^n) \leq k$ untuk semua $n \geq 1$.

(v) hampir k-kontraksi seragam (*nearly uniformly k-contraction*) jika $\eta(T^n) \leq k < 1$ untuk semua $n \geq 1$.

Contoh 3.1. Diberikan $H = \mathbb{R}$, $U = [0,1]$, dan fungsi $T: U \longrightarrow U$ sebagai

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{jika } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 0 & \text{jika } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Mudah ditunjukkan T diskontinu dan non-Lipschitzian. Pembaca dapat melihat Sahu (2005) untuk mengetahui T hampir nonekspansif.

Catatan. Kami lebih memilih menggunakan konstanta k_n dan tidak menggunakan konstanta hampir Lipschitz $\eta(T^n)$ pada syarat cukup setiap hasil paper ini. Kita mengetahui jika $\{T^n(x) : n \geq 1\}$ terbatas untuk suatu $x \in U$, maka untuk setiap $m \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\limsup_n \|T^n(x) - y\| = \limsup_n \|T^{m+n}(x) - y\|$$

dengan $y \in U$ (lihat Dung dan Tan (2003)).

Diberikan $\{B_n\}$ barisan himpunan terbatas di E yang turun monoton. Untuk himpunan bagian tak kosong U dari E didefinisikan,

$$r(\{B_n\}, x) = \inf_n \sup\{\|y - x\| : y \in B_n\}$$

dengan $x \in E$,

$$r(\{B_n\}, U) = \inf\{r(\{B_n\}, x) : x \in U\},$$

$$\mathcal{A}(\{B_n\}, U) = \{x \in U : r(\{B_n\}, x) = r(\{B_n\}, U)\},$$

$$r^2(\{B_n\}, x) = \inf_n \sup\{\|y - x\|^2 : y \in B_n\}$$

dengan $x \in E$,

$$r^2(\{B_n\}, U) = \inf\{r^2(\{B_n\}, x) : x \in U\}.$$

Telah diketahui jika C himpunan bagian tertutup dan konveks dari ruang Hilbert E, maka $\mathcal{A}(\{B_n\}, C)$ mempunyai tepat satu anggota (lihat Lim, 1980). Mudah ditunjukkan, jika $\{a\} = \mathcal{A}(\{B_n\}, C)$ maka $r^2(\{B_n\}, a) = r^2(\{B_n\}, C)$. Dinotasikan pula $\overline{co}C$ sebagai *closure* konveks *hull* C, yaitu irisan semua himpunan konveks tertutup yang memuat C.

Diberikan himpunan bagian tak kosong U dari ruang Hilbert H dan fungsi $T: U \to U$. Fungsi T dikatakan *demicontinuous* apabila untuk setiap barisan $\{x_n\}$ di U yang konvergen kuat ke $x \in U$ maka $\{T(x_n)\}$ konvergen lemah ke Tx.

Lemma di bawah telah dibuktikan di Sahu (2005), kami sajikan untuk versi ruang Hilbert sebagai berikut.

Lemma 3.2. *Diberikan U himpunan bagian tak kosong dari ruang Hilbert H dan $T: U \longrightarrow U$ fungsi demicontinuous. Jika $T^n(x) \to y$ untuk $n \to \infty$ dengan $x, y \in U$, maka $z = Tz$.*

Pembahasan

Dua lemma di bawah ini berturut-turut telah dibuktikan di Ishihara dan Takahashi (1987) dan Ishihara (1989), kami berikan untuk kasus barisan.

Lemma 4.1. *Diberikan C himpunan bagian tak kosong, tertutup, dan konveks dari ruang Hilbert H, dan* $\{B_n\}$ *barisan himpunan tak kosong dan terbatas di H. Jika* $\{a\} = \mathcal{A}(\{B_n\}, C)$ *maka*

$$r^2(\{B_n\}, C) + \|a - x\|^2 \leq r^2(\{B_n\}, x)$$

untuk semua $x \in C$.

Lemma 4.2. *Diberikan C himpunan bagian tak kosong, tertutup, dan konveks dari ruang Hilbert H, dan* $\{B_n\}$ *barisan himpunan tak kosong dan terbatas di H. Jika* $\{a\} = \mathcal{A}(\{B_n\}, C)$ *maka*

$$a \in \bigcap_n \overline{co} B_n.$$

Sekarang kami berikan hasil pertama paper ini.

Teorema 4.3. *Diberikan U himpunan bagian tak kosong dari ruang Hilbert H dan* $T: U \longrightarrow U$ *fungsi demicontinuous hampir Lipschitzian relatif terhadap* $\{a_n\}$ *dengan* $\limsup_n k_n < \sqrt{2}$. *Jika* $\{T^n(y) : n \geq 1\}$ *terbatas untuk suatu* $y \in U$ *dan terdapat himpunan tertutup C yang termuat di U sehingga* $\bigcap_n \overline{co}\{T^m(x) : m \geq n\} \subseteq C$ *untuk semua* $x \in U$, *maka ada* $z \in C$ *sehingga* $T(z) = z$.

Bukti. Karena $\{T^n(y) : n \geq 1\}$ terbatas untuk suatu $y \in U$, maka dengan mudah diperoleh $\{T^n(x) : n \geq 1\}$ terbatas untuk semua $x \in U$. Didefinisikan $B_n(x) = \{T^m(x) : m \geq n\}$ untuk semua $n \geq 1$ dan $x \in U$. Didefinisikan himpunan $\{x_n : n \geq 0\}$ dengan

$$x_0 = y,$$
$$\{x_n\} = \mathcal{A}(\{B_n(x_{n-1})\}, \overline{co}U)$$

untuk semua $n \geq 1$.

Menurut Lemma 4.2 diperoleh $x_n \in \bigcap_n \overline{co}\{T^m(x_{n-1}) : m \geq n\} \subseteq C \subseteq U$ dan disimpulkan barisan $\{x_n\}$ *well defined*. Diberikan notasi

$$r_n(x) = r^2(\{B_n(x_{n-1})\}, x)$$

dan

$$r_n = r^2(\{B_n(x_{n-1})\}, \overline{co}U)$$

untuk semua $n \geq 1$. Dari Lemma 4.1 diperoleh,

$$r_n + \|x - u\|^2 \leq r_n(x) \Leftrightarrow \|x - u\|^2 \leq r_n(x) - r_n$$

untuk semua $u \in \overline{co}U$ dan $n \geq 1$. Jadi untuk setiap $n \geq 1$, dengan mengambil $u = T^m(x_n)$, diperoleh

$$\|x_n - T^m(x_n)\|^2 \leq r_n\big(T^m(x_n)\big) - r_n$$
$$= \limsup_i \left\|T^i(x_{n-1}) - T^m(x_n)\right\|^2 - r_n.$$
$$= \left(\limsup_i \left\|T^i(x_{n-1}) - T^m(x_n)\right\|\right)^2 - r_n$$
$$= \left(\limsup_i \left\|T^m\left(T^i(x_{n-1})\right) - T^m(x_n)\right\|\right)^2 - r_n$$
$$\leq \left(\limsup_i \big(k_m \left\|T^i(x_{n-1}) - x_n\right\| + k_m a_m\big)\right)^2 - r_n$$

$$= \left(k_m \limsup_i \left\| T^i(x_{n-1}) - x_n \right\| + k_m a_m\right)^2 - r_n$$

$$= (k_m r(\{B_n(x_{n-1})\}, \overline{co}U) + k_m a_m)^2 - r_n$$

Misal $\mu = \limsup_n {k_n}^2 - 1 < 1.$

Jadi untuk setiap $n \geq 0$ diperoleh

$$r_{n+1} \leq \limsup_m \|x_n - T^m(x_n)\|^2$$

$$\leq \limsup_m ((k_m r(\{B_n(x_{n-1})\}, \overline{co}U) + k_m a_m)^2) - r_n$$

$$\leq \left(r(\{B_n(x_{n-1})\}, \overline{co}U)\left(\limsup_m k_m\right) + \limsup_m k_m a_m\right)^2 - r_n$$

$$= \left(r(\{B_n(x_{n-1})\}, \overline{co}U)\right)^2 \left(\limsup_n k_n\right)^2 - r_n.$$

$$= \left(\limsup_n {k_n}^2\right) r_n - r_n = \mu r_n.$$

Jadi,

$$r_{n+1} \leq \mu r_n \leq \mu^2 r_{n-1} \leq \cdots \leq \mu^n r_1.$$

Selanjutnya untuk setiap $n \geq 1$ diperoleh

$$\|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq 2\|x_{n+1} - T^m(x_n)\|^2 + 2\|T^m(x_n) - x_n\|^2,$$

yang berakibat

$$\|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq 2 \limsup_m \|x_{n+1} - T^m(x_n)\|^2 + 2 \limsup_m \|T^m(x_n) - x_n\|^2,$$

dengan

$$\limsup_m \|x_{n+1} - T^m(x_n)\|^2 = r^2(\{B_n(x_n)\}, x_{n+1}) = r_{n+1},$$

dan

$$\limsup_m \|T^m(x_n) - x_n\|^2 = r_{n+1}(x_n),$$

Jadi,

$$\|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq 2r_{n+1} + 2r_{n+1}(x_n) \leq 2\mu r_n + 2\mu r_n \leq 4\mu^n r_1.$$

Karena $\mu < 1$ maka $\{x_n\}$ barisan Cauchy di C. Dapat dipilih $z \in C$ dengan sifat $z = \lim_n x_n$.

Diambil sebarang $m \geq 1$. Diperoleh

$$\|z - T^m(z)\|^2 \leq 3\|z - x_n\|^2 + 3\|x_n - T^m(x_n)\|^2 + 3\|T^m(x_n) - T^m(z)\|^2$$

$$\leq 3\|z - x_n\|^2 + 3\|x_n - T^m(x_n)\|^2 + 3(k_m\|x_n - z\| + k_m a_m)^2.$$

Akibatnya,

$$\limsup_m \|z - T^m(z)\|^2$$

$$\leq 3\|z - x_n\|^2 + 3\limsup_m \|x_n - T^m(x_n)\|^2 + 3\limsup_m (k_m\|x_n - z\| + k_m a_m)^2$$

$$= 3\|z - x_n\|^2 + 3r_{n+1}(x_n) + 3\left(\limsup_m (k_m\|x_n - z\| + k_m a_m)\right)^2$$

$$\leq 3\|z - x_n\|^2 + 3\mu^n r_1 + 3\left(\limsup_m k_m\right)\|x_n - z\| + \left(\limsup_m k_m\right)\left(\limsup_m a_m\right)$$

$$= 3\|z - x_n\|^2 + 3\mu^n r_1 + 3\left(\limsup_m k_m\right)\|x_n - z\|.$$

Akibatnya untuk $n \to \infty$ diperoleh

$$\limsup_m \|z - T^m(z)\| = 0.$$

Jadi barisan $\{T^n z\}$ konvergen kuat ke z. Menurut Lemma 3.2 disimpulkan $z = Tz$. ■

Catatan. Teorema 4.3 masih berlaku apabila konstanta k_n diganti dengan konstanta hampir Lipschitz $\eta(T^n)$.

Jika kita perkuat syarat cukup pada fungsi yang kita pakai hanya untuk kasus hampir nonekspansif ataupun hampir *asymptotically* nonekspansif, diperoleh hasil kedua paper ini.

Teorema 4.4. *Diberikan U himpunan bagian tak kosong dari ruang Hilbert H dan $T: U \longrightarrow U$ fungsi demicontinuous hampir Lipschitzian relatif terhadap $\{a_n\}$ dengan* $\limsup_n k_n \leq 1$. *Jika* $\{T^n(x) : n \geq 1\}$ *terbatas dan* $\bigcap_n \overline{co}\{T^m(x) :\ m \geq n\} \subseteq U$ *untuk suatu* $x \in U$, *maka ada* $z \in C$ *sehingga* $T(z) = z$.

Bukti. Dinotasikan

$$B_n(x) = \{T^i(x) : i \geq n\}$$

untuk semua $n \geq 1$. Diberikan

$$\{c\} = \mathcal{A}(\{B_n(x)\}, \overline{co}U).$$

Menurut Lemma 4.1 diperoleh

$$\begin{aligned}
&r^2(\{B_n(x)\}, \overline{co}U) + \|c - T^n(c)\|^2 \\
&\leq r^2\big(\{B_n\}, T^n(c)\big) \\
&= \left(\limsup_m \|T^m(x) - T^n(c)\|\right)^2 \\
&= \left(\limsup_m \big\|T^n\big(T^m(x)\big) - T^n(c)\big\|\right)^2 \\
&\leq \left(k_n \limsup_m \|T^m(x) - c\| + k_n a_n\right)^2 \\
&= (k_n r(\{B_n\}, c) + k_n a_n)^2
\end{aligned}$$

untuk semua $n \geq 1$. Akibatnya,

$$\begin{aligned}
&\limsup_n \|c - T^n(c)\|^2 \\
&\leq \limsup_n (k_n r(\{B_n\}, c) + k_n a_n)^2 \\
&\quad -r^2(\{B_n(x)\}, \overline{co}U) \\
&= \left(\limsup_n {k_n}^2\right) r^2(\{B_n(x)\}, \overline{co}U) \\
&\quad -r^2(\{B_n(x)\}, \overline{co}U) \\
&\leq r^2(\{B_n(x)\}, \overline{co}U) \\
&\quad -r^2(\{B_n(x)\}, \overline{co}U) = 0.
\end{aligned}$$

Oleh karena itu $\limsup_n \|c - T^n(c)\| = 0$. Jadi diperoleh barisan $\{T^n c\}$ konvergen kuat ke c. Menurut Lemma 3.2 disimpulkan $c = Tc$. ■

Catatan. Teorema 4.4 masih berlaku apabila konstanta k_n diganti dengan konstanta hampir Lipschitz $\eta(T^n)$. Dibandingkan Teorema 1.1 (yaitu Browder [1965, Teorema 1] dan Yang [2012, Teorema 1.3]), Teorema 4.4 dan lebih umum lagi Teorema 4.3 memperumum Teorema 1.1 pada 2 aspek: (1) Sifat terbatas, tertutup, dan konveks domain fungsi *T* diganti pada himpunan bagiannya. Khusus sifat terbatas diganti dengan sifat terbatas orbit fungsi *T*. (2) Fungsi *T* pada

Teorema 3.4 lebih umum, bahkan tidak diharuskan kontinu.

Kesimpulan

Berdasarkan kajian pada bab Pembahasan diperoleh kesimpulan berikut ini.

1. Teorema 4.3 menjamin eksistensi titik tetap untuk semua jenis fungsi *demicontinuous* hampir Lipschitzian dengan nilai konstanta Lipschitz $\limsup_{n} \eta(T^n) < \sqrt{2}$.
2. Teorema 4.4 merupakan menjamin eksisitensi titik tetap khusus untuk semua jenis fungsi *demicontinuous* hampir Lipschitzian dengan nilai konstanta Lipschitz $\limsup_{n} \eta(T^n) \leq 1$.
3. Dua hasil paper ini memperumum hasil dari Browder [1965, Teorema 1] sekaligus Yang [2012, Teorema 1.3] pada 2 aspek: (1) Sifat terbatas, tertutup, dan konveks domain fungsi T diganti pada himpunan bagiannya. Khusus sifat terbatas diganti dengan sifat terbatas orbit fungsi T. (2) Fungsi T pada hasil paper ini lebih umum, bahkan tidak diharuskan kontinu.
4. Perlu dikaji aplikasi dari hasil paper ini pada bidang matematika terapan (lanjut) bahkan fisika.

Ucapan Terimakasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Universitas Pekalongan yang telah memberikan kesempatan untuk mempublikasikan paper ini.

Pustaka

Banach, S., 1992, Sur less operations dons les ensembes abstraits et leurs applications, *Fund. Math.* 3, pp. 133 - 181.

Browder, F.E., 1965, Fixed point theorems for noncompact mappings in Hilbert space, *Proc. Nat. Acad. Sci.* U.S.A. 53, pp. 1272 - 1276.

Bruck, R., Kuczumov, dan T., Reich, S., 1993, Convergence of iterates of asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces with the uniform Opial property, *Colloqium Mathematicum*, 65, pp. 169 -179.

Byrne, C., 2004, A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image construction, *Inverse Probl.*, 20, pp. 103 - 120.

Combettes, P.L., 1996, The convex feasibility problem in image recovery, [in:] *Advances in Imaging and Electron Physics*, 95, pp. 195 -270.

Dung, L.A. dan Tan, D.H., 2003, Fixed points of semigroups of Lipschitzian mappings, *Acta Math. Viet.* 28, pp. 89 - 100.

Ishihara, H., 1989, Fixed point theorems for Lipschitzian semigroups, *Canad. Math. Bull.*, 32, pp. 90 - 97.

Ishihara, H. dan Takahashi, W., 1987, Fixed point theorems for uniformly Lipschitzian semigroups in Hilbert spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 127, pp. 206 - 210.

Kirk, W.A., 1974, Fixed point theorems for non-Lipschitzian mappings of asymptotically nonexpansive type, *Israel J. Math*., pp. 339 - 346.

Kitahara, S. dan Takahashi, W., 1993,Image recovery by convex combinations of sunny non-expansive retractions, *Topol. Methods Nonlinear Anal*., 2, pp. 333 - 342.

Kreyszig, E., 1978, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wileys & Sons, New York.

Lim, T.C., 1980, On asymptotic centers and fixed points of nonexpansive mappings, *Canadian J. Math*., 32, pp. 421 - 430.

Sahu, D.R., 2005, Fixed points of demicontinuous nearly Lipschitzian mappings in Banach spaces, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 46, pp. 653 - 666.

Suathai, S. dan Puengrattana, W., 2014, Fixed point theorems for a semigroup of total asymptotically nonexpansive mappings in uniformly convex Banach spaces, *Opuscula Math*. 34, pp. 183 - 197.

Weissinger, J., 1952, Sur theorie and anwendung des interationsvertahrens, *Math. Nachr*., 8, pp. 193 - 212.

Yang, C., A new fixed point theorem for non-expansive mappings and its applications, *arXiv:1208.0979v1* [*math.FA*], 5 Aug 2012.