TEOREMA TITIK TETAP UNTUK FUNGSI QUASI KONTRAKSI DI RUANG ULTRAMETRIK

Muhamad Najibufahmi^a

^a*Pendidikan Matematika FKIP Universitas Pekalongan, muhamadnajibufahmi@yahoo.com*

Abstract

We show that, in the setting of ultrametric spaces, the fixed point theorem for set-valued quasi contraction in [1] holds for all $k < 1$.

Keywords: Fixed point, set-valued quasi contraction map, ultrametric space

1. Latar Belakang

Teori titik tetap telah banyak digunakan untuk menyelesaikan masalah pada beberapa bidang, diantaranya biologi, kedokteran, fisika, teknik, bahkan ekonomi. Salah satu jenis fungsi yang sering dibicarakan pada teori ini adalah quasi kontraksi. Pada tahun 2011, A. Amini-Harandi di [1] memberikan konsep berupa fungsi quasi kontraksi bernilai himpunan yang merupakan perumuman dari konsep di [2]. Diberikan ruang metrik (X, d) . Misal $CB(X)$ menotasikan keluarga semua himpunan bagian dari X yang terbatas dan tertutup. Fungsi $T : X \rightarrow CB(X)$ dikatakan quasi kontraksi apabila terdapat $k < 1$ sehingga

$$H(Tx, Ty) \leq k \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\} \quad (1.1)$$

untuk semua $x, y \in X$, dengan H menotasikan metrik Pompeiu-Hausdorff pada $CB(X)$ yang dibangkitkan oleh metrik d , yaitu

$$H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right\}$$

untuk semua $A, B \in CB(X)$. Hasil utama di [1] menyatakan bahwa setiap fungsi quasi kontraksi bernilai himpunan pada ruang metrik lengkap pasti mempunyai titik tetap, asalkan konstanta $k < \frac{1}{2}$. Supaya hasil tersebut merupakan perumuman dari hasil utama dari Lj. B. Ćirić di [2], A. Amini-Harandi memberikan pertanyaan di [1, Question 2.3], yaitu apakah hasil utama di dalam artikelnya dapat berlaku untuk $k \geq \frac{1}{2}$ atau tidak.

Sepanjang pengetahuan penulis, sampai saat ini pertanyaan tersebut masih merupakan open problem. Pada artikel ini, akan diberikan sebagian jawaban dari open problem tersebut. Dalam hal ini, kami memperkuat salah satu syarat cukup pada hasil utama di [1] yaitu dengan mengganti pasangan terurut (X, d) sebagai ruang metrik menjadi ruang ultrametrik.

Ruang ultrametrik adalah keadaan khusus dari ruang metrik, yaitu ketaksamaan segitiga diganti dengan $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$. Salah satu akibat dari kondisi ini adalah di ruang ultrametrik, setiap barisan $\{x_n\}$ mempunyai sifat

$$d(x_n, x_m) \leq \max\{d(x, x_{j+1}) : \leq j \leq n - 1\}$$

untuk semua $n > m$. Akibatnya, $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy jika dan hanya jika barisan barisan $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ konvergen ke nol. Lebih lanjut, perlu untuk diketahui bahwa telah banyak artikel yang membahas teori titik tetap di ruang ultrametrik, diantaranya adalah [3, 4, 5].

2. Perumusan Masalah

Pada artikel ini ditunjukkan bahwa pada ruang ultrametrik, teorema titik tetap untuk fungsi quasi kontraksi bernilai himpunan di [1] dapat berlaku untuk semua $k < 1$.

3. Pembahasan

Dengan menggunakan metode sederhana yang diambil dari [1] dan [6], kami tunjukkan bahwa Theorem 2.2 dari [1] dapat berlaku untuk semua $k < 1$, asalkan ruang yang digunakan adalah ruang ultrametrik.

Teorema 3.1. *Diberikan ruang ultrametrik lengkap (X, d) . Berlaku bahwa setiap fungsi quasi kontraksi bernilai himpunan $T : X \rightarrow CB(X)$ mempunyai titik tetap.*

Bukti. Pertama, diambil sebarang $q > 1$ sehingga $h = qk < 1$. Diambil pula sebarang $x_0 \in X$ dan $x_1 \in Tx_0$. Selanjutnya dengan menggunakan Lemma 1 dari [7], dibangun barisan $\{x_n\}_{n \geq 0}$ dengan $x_n \in Tx_{n-1}$ yang memenuhi peridaksamaan

$$d(x_n, x_{n-1}) \leq qH(Tx_{n-1}, Tx_{n-2}) \quad (3.1)$$

untuk semua $n \geq 2$. Pada langkah pembuktian selanjutnya diasumsikan $x_n \neq x_{n-1}$ untuk semua $n \geq 1$, sebab x_{n-1} merupakan titik tetap dari T .

Dari (3.1) diperoleh

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n-1}) &\leq qk \max \{d(x_{n-1}, x_{n-2}), d(x_{n-1}, Tx_{n-1}), \\ &\quad d(x_{n-2}, Tx_{n-2}), d(x_{n-1}, Tx_{n-2}), d(x_{n-2}, Tx_{n-1})\} \\ &\leq h \max \{d(x_{n-1}, x_{n-2}), d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-2}, x_n)\} \\ &\leq h \max \{d(x_{n-1}, x_{n-2}), d(x_{n-1}, x_n), \\ &\quad \max \{d(x_{n-2}, x_{n-1}), d(x_{n-1}, x_n)\}\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Diperhatikan bahwa $\max \{d(x_{n-2}, x_{n-1}), d(x_{n-1}, x_n)\}$ haruslah bernilai $d(x_{n-2}, x_{n-1})$, sebab jika tidak demikian maka dari (3.2) diperoleh $d(x_n, x_{n-1}) \leq hd(x_{n-1}, x_{n-2})$ untuk semua $n \geq 2$. Akibatnya,

$$d(x_n, x_{n-1}) \leq h^{n-1}d(x_1, x_0)$$

untuk semua $n \geq 2$. Dengan demikian, $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy. Kondisi lengkap dari X mengakibatkan ada $x^* \in X$ sehingga $x^* = \lim x_n$.

Selanjutnya, diperhatikan bahwa

$$d(x^*, Tx^*) \leq d(x^*, z) \leq \max \{d(x^*, x_{n+1}), d(x_{n+1}, z)\} \quad (3.3)$$

untuk semua $z \in Tx^*$ dan $n \geq 0$. Jika $\max \{d(x^*, x_{n+1}), d(x_{n+1}, z)\} = d(x^*, x_{n+1})$ maka dari (3.3) diperoleh

$$d(x^*, Tx^*) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x^*, x_{n+1}) = 0.$$

Karena Tx^* tertutup maka $x^* \in Tx^*$, yaitu x^* adalah titik tetap dari T . Dilain pihak, jika $\max \{d(x^*, x_{n+1}), d(x_{n+1}, z)\} = d(x_{n+1}, z)$ maka dari (3.3) diperoleh

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx^*) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, Tx^*) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} H(Tx_n, Tx^*) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} k \max \{d(x_n, x^*), d(x_n, Tx_n), d(x^*, Tx^*), d(x_n, Tx^*), d(x^*, Tx_n)\} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} k \max \{d(x_n, x^*), d(x_n, x_{n+1}), d(x^*, Tx^*), d(x_n, Tx^*), d(x^*, x_{n+1})\} \\ &= kd(x^*, Tx^*). \end{aligned}$$

Terakhir, kondisi $k < 1$ berujung pada kesimpulan x^* adalah titik tetap dari T . ■

Selanjutnya, dengan menggunakan metode dari R.H. Haghi dkk. di [6] diberikan pula sifat dimana syarat cukupnya menyangkut dua fungsi.

Akibat 3.2. *Diberikan ruang ultrametrik (X, d) dan fungsi quasi kontraksi bernilai himpunan $T : X \rightarrow CB(X)$. Diberikan pula fungsi $f : X \rightarrow X$ dengan sifat $fX \supseteq TX$ untuk semua $x \in X$. Jika fX lengkap akan himpunan*

$$C(f, T) = \{u \in X : fu \in Tu\} \neq \emptyset.$$

Bukti. Dengan menggunakan Lemma 2.1 dari [6], didefinisikan fungsi $g : fX \rightarrow CB(X)$ dengan sifat $g(fx) = Tx$. Akibatnya, g adalah fungsi quasi kontraksi bernilai himpunan. Selanjutnya dengan menggunakan Teorema 3.1 mudah ditunjukkan bahwa $C(f, T) \neq \emptyset$. ■

Di dalam [6], penulis memberikan konsep berupa fungsi bertipe quasi kontraksi bernilai himpunan di ruang metrik, yaitu dengan cara menghilangkan kondisi $d(x, y)$ di pertidaksamaan (1.1). Mereka pun menjamin bahwa di ruang metrik lengkap, setiap fungsi tersebut mempunyai titik tetap untuk semua $k < 1$. Pada tahun 2013, B. Mohammadi dkk. di [8] menunjukkan bahwa terdapat fungsi quasi kontraksi yang tidak bertipe quasi kontraksi. Dengan demikian, teorema titik tetap di [6] tidak ekuivalen dengan teorema titik tetap di [1]. Berkaitan dengan fakta tersebut, kami ajukan pertanyaan di bawah ini.

Pertanyaan 3.3. Apakah keluarga fungsi quasi kontraksi bernilai himpunan di ruang ultrametrik dengan $k < 1$ sama dengan keluarga fungsi quasi kontraksi bernilai himpunan di ruang metrik dengan $k < 1/2$?

4. Kesimpulan dan Saran

Pada artikel ini telah diberikan teorema titik tetap untuk fungsi quasi kontraksi bernilai himpunan di ruang ultrametrik. Hasil tersebut dapat dipandang sebagai sebagian jawaban dari open problem yang dikemukakan oleh A. Amini-Harandi di [1]. Sebagai akibat dari teorema tersebut, diberikan sifat yang masih terkait konsep titik tetap bersama untuk dua fungsi. Kemudian diberikan pula pertanyaan yang menyangkut ekuivalensi Teorema 3.1 di atas dengan Theorem 2.2 dari [1].

Pustaka

- [1] A. Amini-Harandi, *Fixed point theory for set-valued quasi-contraction maps in metric spaces*, Applied Mathematics Letters **24** (2016) hal. 1791–1794.
- [2] L. B. Ćirić, *A generalization of Banach's contraction principle*, Proceedings of the American Mathematical Society **45** (1974) hal. 267–273.
- [3] C. Petalas, T. Viladis, *A fixed point theorem in non-Archimedean vector spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society **118** (1993) hal 819–821.
- [4] R. Pant, *Some new fixed point theorems for contractive and nonexpansive mappings*, Filomat **28** (2014) hal. 313–317.
- [5] Z. Alinejad, A. K. Mirmostafaei, *Common fixed points of commuting mappings in ultrametric spaces*, Matematika Vesnik **68** (2016) hal. 204–214.
- [6] R. H. Haghi, S. Rezapour, N. Shahzad, *On fixed points of quasi-contraction type multifunctions*, Applied Mathematics Letters **25** (2012) hal. 843–846.
- [7] M. Berinde, V. Berinde, *On a general class of multi-valued weakly Picard mappings*, Journal Of Mathematical Analysis And Application **326** (2007) hal. 772–782.
- [8] B. Mohammadi, S. Rezapour, N. Shahzad, *Some results on fixed points of α - ψ -Ćirić generalized multifunctions*, Fixed Point Theory and Applications **2013** (2013) 24.