



VOL 9 NO. 9.docx

Jan 21, 2021

2211 words / 15734 characters

Denik Agustito

VOL 9 NO. 9.docx

Sources Overview

18%

OVERALL SIMILARITY

1	core.ac.uk INTERNET	3%
2	University of Leeds on 2020-05-07 SUBMITTED WORKS	1%
3	www.readbag.com INTERNET	1%
4	Ben-Itzhak, T.. "Properties of Hurwitz equivalence in the Braid group of order n", Journal of Algebra, 20030601 CROSSREF	<1%
5	arxiv.org INTERNET	<1%
6	dokumen.pub INTERNET	<1%
7	www.am.uni-erlangen.de INTERNET	<1%
8	iris415.ms.u-tokyo.ac.jp INTERNET	<1%
9	media.neliti.com INTERNET	<1%
10	Hoshang Heydari. "General pure multipartite entangled states and the Segre variety", Journal of Physics A Mathematical and General, 0... CROSSREF	<1%
11	www.cjcaesar.ch INTERNET	<1%
12	ir.library.osaka-u.ac.jp INTERNET	<1%
13	msp.warwick.ac.uk INTERNET	<1%
14	Eric Jespers. "Examples", Algebra and Applications, 2007 CROSSREF	<1%

15	denis.monasse.free.fr INTERNET	<1%
16	faculty.ms.u-tokyo.ac.jp INTERNET	<1%
17	link.springer.com INTERNET	<1%
18	www.fernuni-hagen.de INTERNET	<1%
19	BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA BIBLIOTECA on 2020-01-23 SUBMITTED WORKS	<1%
20	Floystad, G.. "PBW-deformations of N-Koszul algebras", Journal of Algebra, 20060801 CROSSREF	<1%
21	Indian Institute of Science Education and Research on 2015-03-26 SUBMITTED WORKS	<1%
22	Jozsef Sandor. "On an inequality of Ky Fan, III", International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 1/1/2001 CROSSREF	<1%
23	Southern Cross University on 2017-04-28 SUBMITTED WORKS	<1%
24	The University of Buckingham on 2018-05-10 SUBMITTED WORKS	<1%
25	www.research.pku.edu.cn INTERNET	<1%
26	Alexandre P. Pojidaev. "Solvability of Finite-Dimensional n-ary Commutative Leibniz Algebras of Characteristic 0", Communications in Al... CROSSREF	<1%
27	D. M. Evans. "Continuous Cohomology of Permutation Groups on Profinite Modules", Communications in Algebra, 5/1/2006 CROSSREF	<1%
28	Dmytro Chibisov. "Spatial Planning and Geometric Optimization: Combining Configuration Space and Energy Methods", Lecture Notes i... CROSSREF	<1%
29	Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales (FLACSO) - Sede Ecuador on 2019-11-07 SUBMITTED WORKS	<1%
30	University of Melbourne on 2015-08-24 SUBMITTED WORKS	<1%
31	Akasaka, R.. "Practical and direct expressions of the heat of vaporization for mixtures", Chemical Engineering Science, 200508 CROSSREF	<1%
32	Oakridge International School on 2014-03-20 SUBMITTED WORKS	<1%
33	Pan, K.. "On orthogonal systems of rational functions on the unit circle and polynomials orthogonal with respect to varying measures", ... CROSSREF	<1%
34	The University of Manchester on 2013-05-15 SUBMITTED WORKS	<1%
35	Yong Wang, Guiping Dai, Xingtian Ren. "A Group Trust Model with Control Flow Constraint Based on Subjective Logic", 2009 Internation... CROSSREF	<1%
36	is.ifmo.ru INTERNET	<1%

37

math.huji.ac.il
INTERNET

<1%

38

theses.gla.ac.uk
INTERNET

<1%

39

www.math.uiowa.edu
INTERNET

<1%

40

www.scribd.com
INTERNET

<1%

Excluded search repositories:

- None

Excluded from Similarity Report:

- Bibliography

Excluded sources:

- None



RUANG PROYEKTIF KOMPLEKS $\mathbb{CP}^n$ ADALAH MANIFOLD KOMPLEKS

Denik Agustito¹⁾, Irham Taufiq²⁾, Dafid Slamet Setiana³⁾, Riawan Yudi Purwoko⁴⁾

^{1,2,3)} Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa, Yogyakarta

⁴⁾ Universitas Muhammadiyah Purworejo, Purworejo

¹⁾ agustito@ustjogja.ac.id, ²⁾ irham.taufiq@gmail.com, ³⁾ dafid.setiana@ustjogja.ac.id,

⁴⁾ riawanyudi@umpwr.ac.id

9 Abstract

Received :
22/12/2020

Accepted :
09/01/2021

Published :
21/01/2021

The purpose of this paper to determine the complex projective space $\mathbb{CP}^n$ as a complex manifold is to calculate the cohomology of the coherent sheaves of $\mathbb{CP}^n$. The research method in this paper is to construct an n -dimensional complex projective space, namely $\mathbb{CP}^n$ and then the n -dimensional complex projective space, namely $\mathbb{CP}^n$, is a complex manifold. The result of this research is the n -dimensional complex projective space, namely $\mathbb{CP}^n$ is a complex and compact manifold.

Keywords: complex, manifold, projective

Abstrak

Tujuan dari tulisan ini untuk mengetahui ruang proyektif kompleks $\mathbb{CP}^n$ sebagai manifold kompleks adalah untuk menghitung kohomologi dari sheaves coherent dari $\mathbb{CP}^n$. Metode penelitian dalam tulisan ini adalah mengkonstruksi ruang proyektif kompleks berdimensi- n yaitu $\mathbb{CP}^n$ dan selanjutnya adalah bahwa ruang proyektif kompleks berdimensi- n yaitu $\mathbb{CP}^n$ adalah manifold kompleks. Hasil dari penelitian ini adalah ruang proyektif kompleks berdimensi- n yaitu $\mathbb{CP}^n$ adalah manifold kompleks dan kompak.

Kata Kunci: kompleks, manifold, proyektif

1. Pendahuluan

Diberikan k adalah lapangan tertutup secara aljabarik dan $k[x_1, \dots, x_n]$ adalah ring suku banyak dengan n -indeterminate. Jika $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ maka himpunan nul dari S adalah himpunan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$V(S) = \{P \in k^n | f(P) = 0 \text{ untuk semua } f \in S\}$$

dimana $k^n = \{(a_1, \dots, a_n) | a_1, \dots, a_n \in k\}$ dan k^n biasanya dinamakan dengan k -ruang affine berdimensi- n . Salah satu contoh lapangan tertutup secara aljabarik adalah $\mathbb{C}$ yaitu lapangan bilangan kompleks sehingga diperoleh $\mathbb{C}$ -ruang affine berdimensi- n yaitu $\mathbb{C}^n$. Secara topologis bahwa $\mathbb{C}$ -ruang affine berdimensi- n yaitu $\mathbb{C}^n$ yaitu manifold kompleks.

adalan himpunan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$V(S) = \{P \in k^n \mid f(P) = 0 \text{ untuk semua } f \in S\}$$

dimana $k^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in k\}$ dan k^n biasanya dinamakan dengan k -ruang affine berdimensi- n . Salah satu contoh lapangan tertutup secara aljabarik adalah $\mathbb{C}$ yaitu lapangan bilangan kompleks sehingga diperoleh $\mathbb{C}$ -ruang affine berdimensi- n yaitu $\mathbb{C}^n$. Secara topologis bahwa $\mathbb{C}$ -ruang affine berdimensi- n yaitu $\mathbb{C}^n$ yaitu manifold kompleks.

Manifold kompleks ini dalam kajian geometri aljabarik digunakan untuk mengkaji Teori Hodge (Kasilingam, 2016).

Selanjutnya jika diberikan k adalah lapangan tertutup secara aljabarik dan $k[X_1^0, \dots, X_n^0]$ adalah ring suku banyak homogen dengan n -indeterminate. Jika $S \subseteq k[X_1^0, \dots, X_n^0]$ maka himpunan nul dari S adalah himpunan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$V(S) = \{P \in kP^n | f(P) = 0 \text{ untuk semua } f \in S\}$$

dimana $kP^n = \{[x_0 : \dots : x_n] | (x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1}\}$ adalah ruang proyektif berdimensi- n . Jika $k = \mathbb{C}$ maka $\mathbb{C}P^n$ biasanya dinamakan dengan $\mathbb{C}$ -ruang proyektif berdimensi- n atau ruang proyektif kompleks berdimensi- n . Jika secara topologis bahwa ruang affine kompleks $\mathbb{C}^n$ merupakan manifold kompleks, pertanyaan selanjutnya adalah apakah ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ juga merupakan manifold kompleks?

Perlunya untuk mengetahui ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ sebagai manifold kompleks adalah untuk menghitung cohomologi dari Sheaves Coherent dari $\mathbb{C}P^n$ (Arapura, 2012). Disamping itu juga dalam tinjauan geometri diferensial bahwa keberadaan lingkaran dalam ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ telah dikembangkan oleh Tosihaki Adachi, Sadahiro Maeda dan Seiichi Udagawa (1995) dan menuntut agar ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ dipandang sebagai manifold (manifold kompleks). Klasifikasi dari ruang proyektif kompleks juga dikembangkan oleh Ramesh Kasilingam (2016) melalui gagasan homotopi dan menuntut agar ruang kompleks proyektif $\mathbb{C}P^n$ memiliki struktur manifold (manifold kompleks).

2. Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan dua langkah, yaitu mengkonstruksi ruang proyektif kompleks berdimensi- n dan dibuktikan bahwa ruang proyektif kompleks berdimensi- n adalah manifold kompleks.

3. Hasil dan Pembahasan

Bentuk ruang euclidean kompleks berdimensi $n + 1$ yaitu sebagai berikut:

$$\mathbb{C}^{n+1} = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) | z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}\}$$

proyektif kompleks berdimensi- n dan dibuktikan bahwa ruang proyektif kompleks berdimensi- n adalah manifold kompleks.

3. Hasil dan Pembahasan

Bentuk ruang euclidean kompleks berdimensi $n + 1$ yaitu sebagai berikut:

$$\mathbb{C}^{n+1} = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) | z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}\}$$

Kemudian didefinisikan sebuah relasi $\sim$ pada himpunan $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ dimana $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$ yaitu sebagai berikut:

$$(y_1, \dots, y_{n+1}) \sim (z_1, \dots, z_{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=} y_j = kz_j \text{ untuk } k \in \mathbb{C}, k \neq 0, j = 1, \dots, n+1$$

Teorema 1.1. Relasi $\sim$ adalah relasi ekuivalen pada $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

Bukti: Bukti diserahkan kepada pembaca.

Karena relasi $\sim$ adalah relasi ekuivalen pada $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, jelas kelas ekuivalen yang memuat $z = (z_1, \dots, z_{n+1})$ dinotasikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} [z] &= [(z_1, \dots, z_{n+1})] = \{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \mid (y_1, \dots, y_{n+1}) \sim (z_1, \dots, z_{n+1})\} \\ &= \{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \mid (y_1, \dots, y_{n+1}) = k(z_1, \dots, z_{n+1}), k \in \mathbb{C}, k \neq 0\} \end{aligned}$$

Tulis $[z] = [(z_1, \dots, z_{n+1})] = [z_1 : \dots : z_{n+1}]$ dan jelas bahwa $[z] = [z_1 : \dots : z_{n+1}]$ adalah sebuah garis dalam ruang euclidean kompleks $\mathbb{C}^{n+1}$ yang melalui titik $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Setelah itu himpunan semua kelas-kelas ekuivalensi yang memuat titik $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ adalah sebagai berikut:

$$\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \sim = \{[z_1 : \dots : z_{n+1}] \mid (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}\}$$

Biasanya himpunan $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \sim$ akan dinotasikan dengan $\mathbb{C}P^n$. Ini jelas $\mathbb{C}P^n$ adalah himpunan semua garis dalam ruang euclidean kompleks $\mathbb{C}^{n+1}$ yang melalui titik $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$ dan katakan $\mathbb{C}P^n = \{[z_1 : \dots : z_{n+1}] \mid (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}\}$ sebagai ruang proyektif kompleks berdimensi n .

Karena ruang euclidean kompleks $\mathbb{C}^{n+1}$ membentuk ruang topologi maka $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ dimana himpunan buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ didefinisikan berikut:

$$U \subseteq \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \text{ buka dalam } \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \stackrel{\text{def}}{=} U = V \cap (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \text{ untuk suatu himpunan buka } V \text{ dalam } \mathbb{C}^{n+1}$$

juga membentuk subruang dari ruang topologi $\mathbb{C}^{n+1}$. Karena $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \sim$ maka terdapat sebuah pemetaan surjektif $\pi: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\pi((z_1, \dots, z_{n+1})) = [z_1 : \dots : z_{n+1}]$$

$U \subseteq \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \stackrel{\text{def}}{=} U = V \cap (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$ untuk suatu himpunan buka V dalam $\mathbb{C}^{n+1}$

juga membentuk subruang dari ruang topologi $\mathbb{C}^{n+1}$. Karena $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \sim$ maka terdapat sebuah pemetaan surjektif $\pi: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\pi((z_1, \dots, z_{n+1})) = [z_1 : \dots : z_{n+1}]$$

Topologi pada $\mathbb{C}P^n$ didefinisikan melalui topologi identifikasi melalui pemetaan $\pi: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ yaitu sebagai berikut:

$$U \subseteq \mathbb{C}P^n \text{ buka dalam } \mathbb{C}P^n \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{-1}(U) \text{ buka dalam } \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$$

dan ini mengakibatkan pemetaan surjektif $\pi: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ adalah kontinu.

Teorema 1.2. Ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ adalah kompak.

Bukti:

Dibuktikan $\mathbb{C}P^n$ adalah kompak.

Ambil sembarang selimut buka dari $\mathbb{C}P^n$ yaitu $\{U_\alpha\}_\alpha$ dari $\mathbb{C}P^n$.

Bentuk $U_{\alpha i} = \{[z_1, \dots, z_{n+1}] | (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}, z_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{C}P^n$.

Karena $V_i = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} | z_i \neq 0\}$ adalah himpunan buka, jelas himpunan $V_i = V_i \cap (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} | z_i \neq 0\}$ adalah juga himpunan buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

Jelas $\pi^{-1}(U_{\alpha i}) = V_i$ adalah himpunan buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

Karena $\pi^{-1}(U_{\alpha i}) = V_i$ adalah himpunan buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, jelas $U_{\alpha i}$ adalah himpunan buka dalam $\mathbb{C}P^n$.

Karena $U_{\alpha i} \subseteq \mathbb{C}P^n$, jelas $\bigcup_{i=1}^{n+1} U_{\alpha i} \subseteq \mathbb{C}P^n$. (*).

Ambil sembarang $[z] = [z_1 : \dots : z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^n$.

Jelas $(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

Jelas $z_i \neq 0$ untuk setiap $i = 1, \dots, n+1$.

Jelas ini juga berlaku $z_i \neq 0$ untuk suatu $i = 1, \dots, n+1$.

Jadi $z = (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ yang sifatnya $z_i \neq 0$ untuk suatu $i = 1, \dots, n+1$.

Akibatnya $[z] \in U_{\alpha i}$ untuk suatu $i = 1, \dots, n+1$.

Jadi $[z] \in \bigcup_{i=1}^{n+1} U_{\alpha i}$.

Jadi $\mathbb{C}P^n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n+1} U_{\alpha i}$. (**).

Dari (*) dan (**), diperoleh $\mathbb{C}P^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_{\alpha i}$.

Jadi $\{U_{\alpha 1}, \dots, U_{\alpha(n+1)}\}$ adalah selimut bagian berhingga dari dari selimut buka $\{U_\alpha\}_\alpha$.

Jadi $\mathbb{C}P^n$ adalah kompak.

Jadi $[z] \in \bigcup_{i=1}^{n+1} U_{\alpha i}$.

Jadi $\mathbb{C}P^n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n+1} U_{\alpha i}$. (**).

Dari (*) dan (**), diperoleh $\mathbb{C}P^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_{\alpha i}$.

Jadi $\{U_{\alpha 1}, \dots, U_{\alpha(n+1)}\}$ adalah selimut bagian berhingga dari dari selimut buka

$\{U_{\alpha}\}_{\alpha}$.

Jadi $\mathbb{C}P^n$ adalah kompak.

Di dalam kajian topologi, jika diberikan sebuah pemetaan kontinu $f: X \rightarrow Y$ dan ruang X adalah terhubung, maka $f(X)$ juga terhubung. Secara khusus jika pemetaan kontinu $f: X \rightarrow Y$ yang surjektif dan X terhubung, maka Y juga terhubung.

Pandang pemetaan $T: \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ yang definisikan sebagai berikut:

$$T((x_1, \dots, x_{n+1}, y_1, \dots, y_{n+1})) = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$$

Pemetaan $T: \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ adalah bijektif dan kontinu. Dan sekarang juga pandang himpunan berikut yang akan dinamakan dengan sphere berdimensi $2n + 1$ yaitu:

$$\mathbb{S}^{2n+1} = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n+2} \mid \sum_{j=1}^n (x_j^2 + y_j^2) = 1\}$$

Jelas bahwa himpunan $\mathbb{S}^{2n+1}$ adalah subruang topologi dari ruang $\mathbb{R}^{2n+2}$. Oleh pemetaan bijektif kontinu $T: \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, sphere $\mathbb{S}^{2n+1}$ akan dipetakan oleh T menjadi $T(\mathbb{S}^{2n+1})$ dan jelas $\mathbb{S}^{2n+1}$ bisa dipandang sama dengan $T(\mathbb{S}^{2n+1})$ dalam ruang topologi $\mathbb{C}^{n+1}$.

Lemma 1.3. Pemetaan $\pi': \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n$ yang mengirimkan semua titik pada $\mathbb{S}^{2n+1}$ ke garis pada $\mathbb{CP}^n$ adalah kontinu dan surjektif.

Bukti:

Karena $\mathbb{CP}^n$ adalah semua garis dalam ruang $\mathbb{C}^{n+1}$ yang melalui titik $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$ dan $\mathbb{S}^{2n+1}$ adalah sphere dalam ruang $\mathbb{C}^{n+1}$ yang berpusat di $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$ maka setiap garis dalam $\mathbb{CP}^n$ selalu berpotongan dengan sphere $\mathbb{S}^{2n+1}$ di dua titik. Ini menegaskan bahwa $\pi': \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n$ adalah surjektif, dan tentunya ini adalah kontinu.

Teorema 1.4. Ruang proyektif kompleks $\mathbb{CP}^n$ adalah terhubung.

Bukti:

Karena sphere $\mathbb{S}^{2n+1}$ adalah ruang terhubung dan $\pi': \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n$ adalah pemetaan kontinu yang surjektif, jelas $\pi'(\mathbb{S}^{2n+1}) = \mathbb{CP}^n$ adalah terhubung.

Jadi $\mathbb{CP}^n$ adalah ruang terhubung.

Teorema 1.4. Ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ adalah terhubung.

Bukti:

Karena sphere $\mathbb{S}^{2n+1}$ adalah ruang terhubung dan $\pi': \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ adalah pemetaan kontinu yang surjektif, jelas $\pi'(\mathbb{S}^{2n+1}) = \mathbb{C}P^n$ adalah terhubung. Jadi $\mathbb{C}P^n$ adalah ruang terhubung.

Sekarang jika diberikan ruang faktor $X/\sim$ dari ruang Hausdorff X dan $\sim$ adalah relasi ekuivalen pada X serta proyeksi $\pi: X \rightarrow X/\sim$ adalah pemetaan terbuka, maka ruang faktor $X/\sim$ adalah Hausdorff jika dan hanya jika himpunan

$$D = \{(x, y) \in X \times X | x \sim y\}$$

adalah tertutup $X \times X$ (Cattani, 2013).

Teorema 1.5. Ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ adalah Hausdorff.

Bukti:

Bentuk pemetaan $f: (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \times (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(y, z) = \sum_{i \neq j} |y_i z_j - y_j z_i|$$

untuk setiap $y = (y_1, \dots, y_{n+1}), z = (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

Jelas $f(y, \lambda y) = 0$ untuk setiap $\lambda \in \mathbb{C}$.

Jika $f(y, z) = 0$, maka $y_i z_j = y_j z_i$ untuk $i \neq j$.

Jelas bahwa y dan z adalah bergantung secara linear, dengan kata lain $y \sim z$.

Tulis $D = f^{-1}(\{0\}) = \{(y, z) \in (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \times (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) | y \sim z\}$.

Karena $\{0\} \subset \mathbb{R}$ adalah himpunan tertutup dan f adalah kontinu, jelas D adalah himpunan tertutup dalam $(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \times (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$.

Akibatnya $\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\sim$ adalah ruang Hausdorff.

Ruang topologi X dikatakan mengikuti aksioma keterbilangan kedua jika ruang topologi tersebut memiliki sebuah basis topologi terbilang (Cattani, 2013). Salah satu sifat ruang topologi yang memenuhi aksioma keterbilangan kedua adalah sembarang subruang dari ruang topologi yang memenuhi aksioma keterbilangan kedua juga memenuhi aksioma keterbilangan kedua dan jika proyeksi $p: X \rightarrow X/\sim$ adalah pemetaan terbuka dan X adalah ruang topologi yang memenuhi aksioma keterbilangan kedua maka ruang faktor $X/\sim$ juga memenuhi aksioma keterbilangan kedua.

Teorema 1.6. Ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ memenuhi aksioma keterbilangan kedua.

Bukti:

Jelas $\mathbb{C}^{n+1}$ memenuhi aksioma keterbilangan kedua.

Salah satu ruang topologi yang memenuhi aksioma keterbilangan kedua adalah sembarang subruang dari ruang topologi yang memenuhi aksioma keterbilangan kedua juga memenuhi aksioma keterbilangan kedua dan jika proyeksi $p: X \rightarrow X/\sim$ adalah pemetaan terbuka dan X adalah ruang topologi yang memenuhi aksioma keterbilangan kedua maka ruang faktor $X/\sim$ juga memenuhi aksioma keterbilangan kedua.

Teorema 1.6. Ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ memenuhi aksioma keterbilangan kedua.

Bukti:

Jelas $\mathbb{C}^{n+1}$ memenuhi aksioma keterbilangan kedua.

Jelas subruang $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ juga memenuhi aksioma keterbilangan kedua.

Jelas proyeksi $\pi: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ adalah pemetaan terbuka.

Jadi $\mathbb{C}P^n$ memenuhi aksioma keterbilangan kedua.

Jadi ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ adalah ruang topologi Hausdorff, kompak, terhubung dan memenuhi aksioma keterbilangan kedua. Dari informasi ini, selanjutnya akan dibuktikan bahwa ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ adalah manifold kompleks.

Definisi 1.7. Manifold Topologis berdimensi $2n$ adalah ruang topologi Hausdorff M yang memenuhi aksioma keterbilangan kedua dan memenuhi sifat euclidean secara lokal. Euclidean secara lokal artinya sebagai berikut:

Untuk setiap titik $p \in M$ terdapat

- (i) Sebuah lingkungan buka U dari p dalam M .
- (ii) Sebuah himpunan buka $U' \subseteq \mathbb{R}^{2n}$.
- (iii) Sebuah homeomorfisma $x: U \rightarrow U'$ dan katakan x dengan *chart* dan U adalah domain dari *chart* x .

Jika koleksi *chart* yaitu $\{x_\alpha: U_\alpha \rightarrow U'_\alpha\}$ dimana $\{U_\alpha\}_\alpha$ selimut buka dari M , maka koleksi *chart* yaitu $\mathcal{A} = \{x_\alpha: U_\alpha \rightarrow U'_\alpha\}$ biasanya dinamakan *atlas*. Jika diberikan dua buah *chart* yaitu $x_1: U_1 \rightarrow U'_1$ dan $x_2: U_2 \rightarrow U'_2$ dan anggap $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ maka pemetaan berikut:

$$x_{12} = (x_2|_{U_1 \cap U_2}) \circ (x_1|_{U_1 \cap U_2})^{-1}: x_1\left(U_1 \cap U_2\right) \rightarrow x_2\left(U_1 \cap U_2\right)$$

yang didefinisikan dengan $x_{12}(q) = x_2 x_1^{-1}(q)$ untuk setiap $q \in x_1(U_1 \cap U_2)$ dinamakan pemetaan transisi.

Jika diberikan sebuah manifold topologis berdimensi $2n$, maka atlas $\mathcal{A}$ dari M dikatakan holomorfik jika semua pemetaan transisinya adalah holomorfik (dalam $\mathbb{C}^n$). Dua buah atlas holomorfik $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ dalam manifold topologis M dikatakan ekuivalen jika $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ juga merupakan atlas holomorfik dan ekuivalensi dua atlas holomorfik ini mendefinisikan sebuah relasi ekuivalen. Kemudian kelas ekuivalen yang memuat sebuah atlas dari relasi ekuivalensi tersebut dinamakan struktur kompleks pada manifold topologis M . Manifold kompleks berdimensi n adalah manifold topologis berdimensi $2n$ yang memiliki sebuah struktur kompleks.

Jika diberikan sebuah manifold topologis berdimensi $2n$, maka atlas $\mathcal{A}$ dari M dikatakan holomorfik jika semua pemetaan transisinya adalah holomorfik (dalam $\mathbb{C}^n$). Dua buah atlas holomorfik $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ dalam manifold topologis M dikatakan ekuivalen jika $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ juga merupakan atlas holomorfik dan ekuivalensi dua atlas holomorfik ini mendefinisikan sebuah relasi ekuivalen. Kemudian kelas ekuivalen yang memuat sebuah atlas dari relasi ekuivalensi tersebut dinamakan struktur kompleks pada manifold topologis M . Manifold kompleks berdimensi n adalah manifold topologis berdimensi $2n$ yang memiliki sebuah struktur kompleks.

Teorema 1.8. Ruang proyektif $\mathbb{CP}^n$ adalah manifold topologis berdimensi $2n$.

Bukti:

Ambil sembarang $[Z] = [z_1 : \dots : z_{n+1}] \in \mathbb{CP}^n$.

Bentuk $U_i = \{[z_1, \dots, z_{n+1}] | (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}, z_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{CP}^n$.

Definisikan pemetaan $x_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$x_i([z_1, \dots, z_{n+1}]) = \left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i} \right)$$

Dibuktikan bahwa pemetaan $x_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ adalah homeomorfisma.

(i) Dibuktikan pemetaan $x_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ adalah kontinu.

Ambil sembarang himpunan buka V dalam $\mathbb{R}^{2n}$.

$$\begin{aligned} \text{Jelas } x_i^{-1}(V) &= \{[z_1, \dots, z_{n+1}] | x_i([z_1, \dots, z_{n+1}]) \in V\} \\ &= \{[z_1, \dots, z_{n+1}] | \left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i} \right) \in V\} \end{aligned}$$

$$\text{Jelas } \pi^{-1}(x_i^{-1}(V)) = \{[z_1, \dots, z_{n+1}] | \left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i} \right) \in V\}.$$

$$\text{Pilih } W = \{[z_1, \dots, z_{n+1}] | \left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i} \right) \in V\} \subset \mathbb{C}^{n+1}.$$

Jelas W himpunan buka dalam $\mathbb{C}^{n+1}$.

$$\text{Jelas } \pi^{-1}(x_i^{-1}(V)) = W \cap (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}).$$

Jelas $\pi^{-1}(x_i^{-1}(V))$ adalah himpunan buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

Karena $\pi^{-1}(x_i^{-1}(V))$ adalah himpunan buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ dan proyeksi π

adalah pemetaan terbuka jelas $\pi(\pi^{-1}(x_i^{-1}(V))) = x_i^{-1}(V)$ adalah himpunan

buka dalam $\mathbb{CP}^n$.

Pilih $W' = x_i^{-1}(V)$ sebagai himpunan buka dalam $\mathbb{CP}^n$.

$$\text{Jelas } x_i^{-1}(V) = W' \cap U_i.$$

Jelas $x_i^{-1}(V)$ adalah himpunan buka dalam U_i .

$$\text{Jelas } x_i(x_i^{-1}(V)) \subseteq V.$$

Karena V adalah sembarang himpunan buka dalam $\mathbb{R}^{2n}$ yang sifatnya terdapat

himpunan buka dalam U_i yaitu $x_i^{-1}(V)$ yang sifatnya $x_i(x_i^{-1}(V)) \subseteq V$, jelas

pemetaan $x_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ adalah kontinu.

Jelas $x_i^{-1}(V) = W' \cap U_i$.

Jelas $x_i^{-1}(V)$ adalah himpunan buka dalam U_i .

Jelas $x_i(x_i^{-1}(V)) \subseteq V$.

Karena V adalah sembarang himpunan buka dalam $\mathbb{R}^{2n}$ yang sifatnya terdapat himpunan buka dalam U_i yaitu $x_i^{-1}(V)$ yang sifatnya $x_i(x_i^{-1}(V)) \subseteq V$, jelas pemetaan $x_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ adalah kontinu.

(ii) Dibuktikan pemetaan $x_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ adalah bijektif.

1. Ambil sembarang $[y_1, \dots, y_{n+1}], [z_1, \dots, z_{n+1}] \in U_i$ yang sifatnya

$$x_i([y_1, \dots, y_{n+1}]) = x_i([z_1, \dots, z_{n+1}]).$$

Jelas $\frac{y_k}{y_i} = \frac{z_k}{z_i}$ untuk setiap $k \neq i$.

Jelas $y_k z_i = y_i z_k$ untuk setiap $k \neq i$.

Karena $y_k z_i = y_i z_k$ untuk setiap $k \neq i$, jelas $(y_1, \dots, y_{n+1}) \sim (z_1, \dots, z_{n+1})$ dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

Karena $(y_1, \dots, y_{n+1}) \sim (z_1, \dots, z_{n+1})$ dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, jelas $[y_1, \dots, y_{n+1}] = [z_1, \dots, z_{n+1}]$.

Jadi pemetaan $x_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ adalah injektif.

2. Ambil sebarang $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Tulis $z_k = x_k + iy_k$ untuk setiap $k = 1, \dots, n$.

Pilih $[z] = [z_1: \dots: z_{k-1}: 1: z_k: \dots: z_n] \in U_i$.

$$\begin{aligned} \text{Jelas } x_k([z_1: \dots: z_{k-1}: 1: z_k: \dots: z_n]) &= \left(\frac{z_1}{1}, \dots, \frac{z_{k-1}}{1}, \frac{z_k}{1}, \dots, \frac{z_n}{1} \right) \\ &= (z_1, \dots, z_n) \\ &= (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Jadi pemetaan $x_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ adalah surjektif.

Dari 1 dan 2, diperoleh pemetaan $x_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ adalah bijektif.

(iii) Dibuktikan pemetaan $x_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ memiliki invers.

Definisikan $x_i^{-1}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow U_i$ sebagai berikut:

$$x_i^{-1}((x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)) = x_i^{-1}(z_1, \dots, z_n) = [z_1: \dots: z_{i-1}: 1: z_i: \dots: z_n]$$

$$\begin{aligned} 1. \text{ Jelas } x_i^{-1}(x_i([z_1, \dots, z_{n+1}])) &= x_i^{-1}\left(\left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\right)\right) \\ &= \left[\frac{z_1}{z_i}: \dots: \frac{z_{i-1}}{z_i}: 1: \frac{z_{i+1}}{z_i}: \dots: \frac{z_{n+1}}{z_i}\right] \\ &= \left[\frac{z_1}{z_i}: \dots: \frac{z_{i-1}}{z_i}: \frac{z_i}{z_i}: \frac{z_{i+1}}{z_i}: \dots: \frac{z_{n+1}}{z_i}\right] \\ &= [z_1, \dots, z_{n+1}]. \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } x_i^{-1} \circ x_i = 1_{U_i}.$$

$$\begin{aligned}
 1. \text{ Jelas } x_i^{-1}(x_i([z_1, \dots, z_{n+1}])) &= x_i^{-1}\left(\left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\right)\right) \\
 &= \left[\frac{z_1}{z_i} : \dots : \frac{z_{i-1}}{z_i} : 1 : \frac{z_{i+1}}{z_i} : \dots : \frac{z_{n+1}}{z_i}\right] \\
 &= \left[\frac{z_1}{z_i} : \dots : \frac{z_{i-1}}{z_i} : \frac{z_i}{z_i} : \frac{z_{i+1}}{z_i} : \dots : \frac{z_{n+1}}{z_i}\right] \\
 &= [z_1, \dots, z_{n+1}].
 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } x_i^{-1} \circ x_i = 1_{U_i}.$$

$$\begin{aligned}
 2. \text{ Jelas } x_i(x_i^{-1}((z_1, \dots, z_n))) &= x_i([z_1 : \dots : z_{i-1} : 1 : z_i : \dots : z_n]) \\
 &= \left(\frac{z_1}{1}, \dots, \frac{z_n}{1}\right) \\
 &= (z_1, \dots, z_n)
 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } x_i \circ x_i^{-1} = 1_{\mathbb{R}^{2n}}$$

Dari 1 dan 2, diperoleh $x_i^{-1}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow U_i$ adalah invers dari pemetaan x_i .

(iv). Dibuktikan bahwa pemetaan $x_i^{-1}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow U_i$ adalah kontinu.

Ambil sembarang himpunan buka V dalam U_i .

$$\begin{aligned}
 \text{Jelas } (x_i^{-1})^{-1}(V) &= \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid [z_1 : \dots : z_{i-1} : 1 : z_i : \dots : z_n] \in V \subseteq U_i\} \\
 &= \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid (z_1, \dots, z_{i-1}, 1, z_i, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}\} \\
 &= \mathbb{R}^{2n}.
 \end{aligned}$$

Jelas $(x_i^{-1})^{-1}(V) = \mathbb{R}^{2n}$ adalah himpunan buka dalam $\mathbb{R}^{2n}$.

$$\text{Jelas } x_i((x_i^{-1})^{-1}(V)) \subseteq V.$$

Jadi pemetaan $x_i^{-1}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow U_i$ adalah kontinu.

Dari (i), (ii), (iii) dan (iv), jelas pemetaan $x_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ adalah homeomorfisma.

Jadi pemetaan $x_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ adalah *chart* pada U_i .

(v) Dibuktikan bahwa $\{U_i\}_{i=1}^{n+1}$ adalah selimut buka dari $\mathbb{C}P^n$; artinya $\bigcup_{i=1}^{n+1} U_i = \mathbb{C}P^n$.

Karena $V_i = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z_i \neq 0\}$ adalah himpunan buka, jelas himpunan $V_i = V_i \cap (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z_i \neq 0\}$ adalah juga himpunan buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

Jelas $\pi^{-1}(U_i) = V_i$ adalah himpunan buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

Karena $\pi^{-1}(U_i) = V_i$ adalah himpunan buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, jelas U_i adalah himpunan buka dalam $\mathbb{C}P^n$.

Karena $U_i \subseteq \mathbb{C}P^n$, jelas $\bigcup_{i=1}^{n+1} U_i \subseteq \mathbb{C}P^n$. (*)

Ambil sembarang $[z] = [z_1 : \dots : z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^n$.

Jelas $(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

Jelas $z_i \neq 0$ untuk setiap $i = 1, \dots, n+1$.

Jelas ini juga berlaku $z_i \neq 0$ untuk suatu $i = 1, \dots, n+1$.

Karena $\pi^{-1}(U_i) = V_i$ adalah himpunan buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, jelas U_i adalah himpunan buka dalam $\mathbb{C}P^n$.

Karena $U_i \subseteq \mathbb{C}P^n$, jelas $\bigcup_{i=1}^{n+1} U_i \subseteq \mathbb{C}P^n$. (*).

Ambil sembarang $[z] = [z_1 : \dots : z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^n$.

Jelas $(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

Jelas $z_i \neq 0$ untuk setiap $i = 1, \dots, n + 1$.

Jelas ini juga berlaku $z_i \neq 0$ untuk suatu $i = 1, \dots, n + 1$.

Jadi $z = (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ yang sifatnya $z_i \neq 0$ untuk suatu $i = 1, \dots, n+1$.

Akibatnya $[z] \in U_i$ untuk suatu $i = 1, \dots, n+1$.

Jadi $[z] \in \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$.

Jadi $\mathbb{C}P^n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$. (**).

Dari (*) dan (**), diperoleh $\mathbb{C}P^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$.

Jadi $\{U_i\}_{i=1}^{n+1}$ adalah selimut buka dari $\mathbb{C}P^n$.

Dari (v), jelas bahwa $\mathcal{A} = \{x_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^{2n}\}_{i=1}^{n+1}$ membentuk atlas pada $\mathbb{C}P^n$.

Jadi ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ adalah manifold topologis berdimensi $2n$.

Diberikan $U_i = \{[z_1, \dots, z_{n+1}] | z_i \neq 0\}$ dan $U_j = \{[z_1, \dots, z_{n+1}] | z_j \neq 0\}$ dan pandang $\mathbb{R}^{2n}$ sebagai $\mathbb{C}^n$. Anggap $i < j$ dan diperoleh himpunan berikut:

$$U_i \cap U_j = \{[z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_{n+1}] | z_i, z_j \neq 0\}$$

dan ini jelas bahwa pemetaan $x_i|_{U_i \cap U_j}: U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$x_i|_{U_i \cap U_j}([z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_{n+1}]) = \left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_j}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i} \right)$$

serta pemetaan $x_j|_{U_i \cap U_j}: U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ juga didefinisikan sebagai berikut:

$$x_j|_{U_i \cap U_j}([z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_{n+1}]) = \left(\frac{z_1}{z_j}, \dots, \frac{z_i}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_j} \right)$$

Kemudian bentuk pemetaan transisi yaitu pemetaan $x_{ij}: x_i(U_i \cap U_j) \rightarrow x_j(U_i \cap U_j)$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \left(x_j|_{U_i \cap U_j} \right) \circ \left(x_i|_{U_i \cap U_j} \right)^{-1} ((z_1, \dots, z_n)) \\ &= \left(\frac{z_1}{z_j}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_j}, \frac{1}{z_j}, \frac{z_i}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right) \end{aligned}$$

Lemma 1.9. Fungsi $x_k: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ yang didefinisikan dengan $x_k((z_1, \dots, z_k, \dots, z_n)) = z_k$ adalah holomorfik untuk setiap $k = 1, \dots, n$.

Bukti:

$$\begin{aligned}
 x_{ij} &= \left(x_j|_{U_i \cap U_j} \right) \circ \left(x_i|_{U_i \cap U_j} \right)^{-1} ((z_1, \dots, z_n)) \\
 &= \left(\frac{z_1}{z_j}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_j}, \frac{1}{z_j}, \frac{z_i}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right)
 \end{aligned}$$

Lemma 1.9. Fungsi $x_k: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ yang didefinisikan dengan $x_k((z_1, \dots, z_k, \dots, z_n)) = z_k$ adalah holomorfik untuk setiap $k = 1, \dots, n$.

Bukti:

Pemetaan $x_k: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ yang didefinisikan dengan $x_k((z_1, \dots, z_k, \dots, z_n)) = z_k$ dapat dinyatakan dalam bentuk $x_k = u(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) + iv(y_1, \dots, y_k, \dots, y_n) = x_k + iy_k$ untuk setiap $k = 1, \dots, n$.

Jelas $u(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = x_k$ dan $v(y_1, \dots, y_k, \dots, y_n) = y_k$.

Dengan persamaan Cauchy-Riemann diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y_k} \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y_k} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x_k}$$

untuk setiap $k = 1, \dots, n$.

Jadi $x_k: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ yang didefinisikan dengan $x_k((z_1, \dots, z_k, \dots, z_n)) = z_k$ adalah holomorfik untuk setiap $k = 1, \dots, n$.

Sifat 1.10. Untuk $i < j$, pemetaan transisi $x_{ij}: x_i(U_i \cap U_j) \rightarrow x_j(U_i \cap U_j)$ adalah holomorfik.

Bukti:

Pemetaan transisi $x_{ij}: x_i(U_i \cap U_j) \rightarrow x_j(U_i \cap U_j)$ dapat dinyatakan $x_{ij} = (x_{i1}, \dots, x_{ik}, \dots, x_{in})$, dimana $x_{ik}: x_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$x_{ik}((z_1, \dots, z_k, \dots, z_n)) = z_k$$

untuk setiap $(z_1, \dots, z_k, \dots, z_n) \in x_i(U_i \cap U_j)$.

Jelas berdasarkan Lemma 1.9, pemetaan $x_{ik}: x_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ adalah holomorfik.

Akibatnya pemetaan transisi $x_{ij}: x_i(U_i \cap U_j) \rightarrow x_j(U_i \cap U_j)$ adalah holomorfik.

Dari Sifat 1.10, jelas atlas $\mathcal{A} = \{x_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^{2n}\}_{i=1}^{n+1}$ adalah atlas holomorfik. Kelas ekuivalensi yang memuat atlas holomorfik $\mathcal{A} = \{x_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^{2n}\}_{i=1}^{n+1}$ dinamakan struktur kompleks pada $\mathbb{C}P^n$ dan akibatnya ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ adalah manifold kompleks.

4. Kesimpulan

Simpulan dari penelitian ini adalah 1) ruang proyektif kompleks berdimensi- n yaitu $\mathbb{C}P^n$ dikonstruksi melalui ruang euclidean kompleks berdimensi- $n + 1$ yaitu $\mathbb{C}^{n+1}$ terhadap relasi ekuivalensi tertentu, 2) ruang proyektif kompleks berdimensi- n yaitu $\mathbb{C}P^n$

kompleks pada $\mathbb{C}P^n$ dan akibatnya ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ adalah manifold kompleks.

4. Kesimpulan

Simpulan dari penelitian ini adalah 1) ruang proyektif kompleks berdimensi- n yaitu $\mathbb{C}P^n$ dikonstruksi melalui ruang euclidean kompleks berdimensi- $n + 1$ yaitu $\mathbb{C}^{n+1}$ terhadap relasi ekuivalensi tertentu, 2) ruang proyektif kompleks berdimensi- n yaitu $\mathbb{C}P^n$

adalah ruang topologi kompak dan terhubung, dan 3) ruang proyektif kompleks berdimensi- n yaitu $\mathbb{C}P^n$ adalah manifold kompleks berdimensi- n .

Pustaka

Adachi, T., Udagawa, S, Maeda, S., 1995,¹² *Circles in a Complex Projective Space*, Osaka J. Math.32 (1995), 709-719.

Arapura, D.,²³ 2012., *Algebraic Geometry over the Complex Numbers*,. New-York, Springer-Verlag.

Cattani, E., Zein, F.E., Griffiths, P.A., Trang, L.D. (2013). *Hodge Theory*. Princeton and Oxford: Princeton University Press.

Dugundji, J., 1966., *Topology*,. Michigan., Allyn and Bacon.

Kasilingam, R., 2016.,⁵ *Classification of Smooth Structures on a Homotopy Complex Projective Space*,. Proc. Indian Acad. Sci (Math.Sci). Vol. 126, No. 2, May 2016, pp.277-281, Indian Academy of Sciences.

Movasati, H. & Vilaflor, R. (2020). *A Course in Hodge Theory: Periods of Algebraic Cycles*. Publisher.

Movasati, H. (2020).²⁵ *A Course in Hodge Theory: With Emphasis on Multiple Integrals*. Boston: International Press.

Nicolaescu, L.I. (2018). *Lectures on the Geometry of Manifolds*. Washington: World Scientific.

³⁴ Tu, L.W. (1982). *An Introduction to Manifolds*. New York: Springer.

¹⁷ Voisin, C., 2002, *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I*, Cambridge, Cambridge University Press.

