

LOCALLY SMALL RIEMANN SUMS FUNGSI TERINTEGRAL HENSTOCK-DUNFORD PADA RUANG EUCLIDE $\mathbb{R}^n$

Solikhin

Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Matematika UNDIP
Jl. Prof. Soedarto, S.H. Semarang 50275 , soli_erf@yahoo.com

ABSTRAK

In this paper we study Henstock-Dunford integral on the Euclidean space $\mathbb{R}^n$. We discuss some properties of the integrable. We shall define locally small Riemann sums (LSRS) and show that it is necessary and sufficient condition for function to be Henstock-Dunford integral on the Euclidean space $\mathbb{R}^n$.

Kata Kunci : Henstock-Dunford integral, Locally small Riemann sums

Pendahuluan

Integral Henstock merupakan generalisasi dari integral Riemann, yang didefinisikan berdasarkan partisi Perron δ -fine. Integral ini memuat integral Riemann dan integral Lebesgue (ekuivalen integral McShane) [2], [7]. Integral Henstock telah mengalami perkembangan baik dari segi teori maupun aplikasinya [1], [4], [6]. Dari kajian tentang integral Henstock banyak sifat-sifat yang telah diungkap baik dalam ruang real $\mathbb{R}$ [2], [7] maupun ruang Euclide $\mathbb{R}^n$ [5].

Berbeda dengan integral Dunford. Dunford mendefinisikan integralnya pada fungsi terukur lemah pada ruang real $\mathbb{R}$ [9]. Diberikan X ruang Banach dan X^* ruang dualnya. Fungsi terukur lemah

$f : [a, b] \rightarrow X$ dikatakan terintegral Dunford pada $[a, b]$ jika untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real $x^* f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terintegral Lebesgue pada $[a, b]$ dan untuk setiap $A \subset [a, b]$ himpunan terukur terdapat vektor $x_{(f,A)}^{**} \in X^{**}$ sehingga

$$x_{(f,A)}^{**}(x^*) = (H) \int_A x^* f = (H) \int_a^b x^* f \chi_A.$$

Integral Dunford kemudian diperluas ke dalam integral tipe Riemann, yaitu untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real $x^* f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terintegral Henstock. Integral ini dinamakan integral Henstock-Dunford [3]. Integral jenis ini juga telah digeneralisasi ke dalam ruang Euclide $\mathbb{R}^n$ [8]. Pembahasannya meliputi sifat-sifat sederhana dan beberapa teorema kekonvergenan [8]. Hasil penelitian ini

menjadi perhatian penulis untuk mengkaji sifat perluasan Harnack dan perluasan Cauchy pada penelitian sebelumnya.

Berdasarkan hasil kajian integral Henstock-Dunford mengenai sifat-sifat sederhana dan fungsi primitifnya [8], penulis akan mengkaji sifat-sifat lebih lanjut dari integral Henstock-Dunford pada ruang Euclide $\mathbb{R}^n$. Sifat-sifat ini digeneralisasi dari integral Henstock pada ruang real $\mathbb{R}$, yaitu sifat Locally small Riemann sums fungsi terintegral Henstock. Diperoleh bahwa syarat perlu dan cukup suatu fungsi terintegral Henstock adalah memenuhi sifat locally small Riemann sumsnya [7].

Metode Penelitian

Langkah awal dalam penelitian ini adalah mengkaji teori integral, integral Henstock bernilai real dan sifat locally small Riemann sumsnya, kemudian mengkaji integral Henstock-Dunford pada ruang real $\mathbb{R}$ dan integral Henstock-Dunford pada ruang Euclide $\mathbb{R}^n$. Langkah selanjutnya adalah menggeneralisasi sifat locally small Riemann sums dari integral Henstock ke dalam integral Henstock-Dunford pada ruang Euclide $\mathbb{R}^n$. Kemudian dari hasil analisa tersebut disimpulkan dalam bentuk teorema.

Hasil dan Pembahasan

Integral Henstock-Dunford pada Ruang Euclide $\mathbb{R}^n$

Pada tulisan ini, dibahas definisi integral Henstock-Dunford pada ruang Euclide $\mathbb{R}^n$, sifat-sifat sederhana, dan fungsi primitifnya mengacu pada [8].

Definisi 3.1. [8] Diberikan X ruang Banach dan X^* ruang dualnya, volume- α pada $\mathbb{R}^n$ dan sel $E \subset \mathbb{R}^n$. Fungsi $f : E \rightarrow X$ dikatakan terintegral Henstock -Dunford pada E jika untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^* f$ terintegral Henstock pada E dan untuk setiap sel $A \subset E$ terdapat vektor $x_{(f,A,\alpha)}^{**} \in X^{**}$ sehingga

$$x_{(f,A,\alpha)}^{**}(x^*) = (H) \int_A x^* f.$$

Vektor $x_{(f,A,\alpha)}^{**} \in X^{**}$ di atas disebut nilai integral Henstock-Dunford fungsi f pada A dan ditulis

$$x_{(f,A,\alpha)}^{**} = (HD) \int_A f.$$

Jika f terintegral Henstock-Dunford pada E , ditulis $f \in HD(E, \alpha)$.

Teorema 3.2. [8] Jika $f \in HD(E, \alpha)$ maka $f \in HD(A, \alpha)$ untuk setiap sel bagian $A \subset E$.

Bukti :

Jelas berdasarkan definisi. ■

Teroema 3.3. (Kriteria Cauchy) Fungsi
 $f \in HD(E, \alpha)$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga jika $A \subset E$ sel dan $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ dan $\mathcal{P} = \{(P, \bar{y})\}$ masing-masing partisi Perron δ -fine pada A berlaku

$$\left| \mathcal{D} \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) - \mathcal{P} \sum x^* f(\bar{y}) \alpha(P) \right| < \varepsilon$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Bukti:

(Syarat Perlu) Diketahui $f \in HD(E, \alpha)$. Jadi untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^* f$ terintegral Henstock pada sel E dan untuk setiap sel $A \subset E$ terdapat vektor $x_{(f,A)}^{**} \in X^{**}$ sehingga

$$x_{(f,A)}^{**}(x^*) = (H) \int_A x^* f.$$

Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang dan $x^* \in X^*$ maka terdapat fungsi positif δ pada sel E sehingga untuk setiap sel $A \subset E$ dan $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ dan $\mathcal{P} = \{(P, \bar{y})\}$ masing-masing partisi Perron δ -fine pada A berlaku

$$\left| x_{(f,A)}^{**}(x^*) - \mathcal{D} \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$\left| x_{(f,A,\alpha)}^{**}(x^*) - \mathcal{P} \sum x^* f(\bar{y}) \alpha(P) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{D} \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) - \mathcal{P} \sum x^* f(\bar{y}) \alpha(P) \right| \\ & \leq \left| \mathcal{D} \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) - x_{(f,A,\alpha)}^{**}(x^*) \right| \\ & \quad + \left| x_{(f,A,\alpha)}^{**}(x^*) - \mathcal{P} \sum x^* f(\bar{y}) \alpha(P) \right| \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(Syarat cukup) Diberikan

bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang dan $x^* \in X^*$ maka terdapat fungsi positif δ pada sel E sehingga untuk setiap sel $A \subset E$ dan $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ dan $\mathcal{P} = \{(P, \bar{y})\}$ masing-masing partisi Perron δ -fine pada A berlaku

$$\left| \mathcal{D} \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) - \mathcal{P} \sum x^* f(\bar{y}) \alpha(P) \right| < \varepsilon.$$

Diambil $\varepsilon = 1$ terdapat fungsi positif δ_1 pada E dengan sifat di atas.

Diambil $\varepsilon = \frac{1}{2}$ terdapat fungsi positif δ_2 pada E dengan $\delta_2 \leq \delta_1$ dan memenuhi sifat di atas.

Diambil $\varepsilon = \frac{1}{n}$ terdapat fungsi positif δ_n pada E dengan

$\delta_n \leq \delta_{n-1} \leq \dots \leq \delta_2 \leq \delta_1$ dan memenuhi sifat di atas.

Untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ dan $x^* \in X^*$ didefinisikan

$$S_n = \mathcal{D}_n \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D),$$

dengan jumlahan diambil atas partisi Perron δ_n -fine $\mathcal{D}_n = \{(D, \bar{x})\}$ pada A .

Diambil sebarang $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m \geq n$, maka untuk setiap partisi Perron δ_m -fine pada A merupakan partisi Perron δ_n -fine pada A .

Akibatnya untuk setiap partisi Perron δ_m -fine $\mathcal{D}_m = \{(D, \bar{x})\}$ pada A dan sebarang partisi Perron δ_n -fine $\mathcal{D}_n = \{(D, \bar{x})\}$ pada A berlaku

$$|S_m - S_n| =$$

$$|\mathcal{D}_m \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) - \mathcal{D}_n \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D)| < \frac{1}{n}$$

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ maka terdapat bilangan asli n_0 sehingga

$$\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Selanjutnya jika $m, n \geq n_0$ maka diperoleh

$$|S_m - S_n| < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hal ini berarti $\{S_n\}$ barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ lengkap berarti untuk setiap $x^* \in X^*$ dan $A \subset E$ di atas terdapat bilangan $x_{(f, A, \alpha)}^{**}(x^*) = S \in \mathbb{R}$ sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.

Dengan demikian untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ di atas terdapat bilangan asli n_0^* dan jika $n \geq n_0^*$ berlaku

$$|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Diambil

$$\delta(\bar{x}) = \min \{ \delta_{n_0}(\bar{x}), \delta_{n_0^*}(\bar{x}) : \bar{x} \in E \}$$

Diperoleh δ fungsi positif pada E .

Selanjutnya untuk setiap $\mathcal{P} = \{(P, \bar{x})\}$ partisi Perron δ -fine pada A berlaku

$$\begin{aligned} & |\mathcal{P} \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(P) - S| \\ & \leq |\mathcal{P} \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(P) - S_{n_0^*}| + |S_{n_0^*} - S| \end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hal ini berarti untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^* f$ terintegral Henstock pada E dan terdapat vektor $x_{(f, A, \alpha)}^{**} \in X^{**}$ sehingga

$$x_{(f,A,\alpha)}^{**}(x^*) = S = (H) \int_A x^* f.$$

Dengan kata lain, $f \in HD(E, \alpha)$.

■

Definisi 3.3. [8] Diberikan $f \in HD(E, \alpha)$ dan $\mathcal{J}(E)$ koleksi semua sel bagian di dalam E . Fungsi $F: \mathcal{J}(E) \rightarrow X$ dengan rumus

$$F(A) = x_{(f,A,\alpha)}^{**} = (HD) \int_A f$$

dan $F(\emptyset) = 0$, untuk setiap $A \in \mathcal{J}(E)$ disebut fungsi primitif-HD fungsi f .

Berdasarkan Definisi 3.3 maka fungsi F merupakan fungsi aditif.

Akibat 3.5. [8] Jika $f \in HD(E, \alpha)$ dengan F sebagai primitif-HDnya dan $E_1, E_2, \dots, E_p$ sel-sel di dalam E yang tidak saling tumpang-tindih dan

$$E = \bigcup_{i=1}^p E_i \text{ maka}$$

$$F(E) = \sum_{i=1}^p F(E_i) = \sum_{i=1}^p x_{(f,E_i,\alpha)}^{**}.$$

Bukti :

Karena $f \in HD(E, \alpha)$ dengan F

sebagai primitif-HDnya, $E = \bigcup_{i=1}^p E_i$

dengan $E_i^0 \cap E_j^0 = \emptyset$ untuk setiap $i \neq j$ maka diperoleh

$$F(E) = F\left(\bigcup_{i=1}^p E_i\right)$$

$$= x_{\left(f, \bigcup_{i=1}^p E_i, \alpha\right)}^{**}$$

$$= x_{(f,E_1,\alpha)}^{**} + x_{(f,E_2,\alpha)}^{**} + \dots + x_{(f,E_p,\alpha)}^{**}$$

$$= F(E_1) + F(E_2) + \dots + F(E_p)$$

$$= \sum_{i=1}^p F(E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^p x_{(f,E_i,\alpha)}^{**}. \quad \blacksquare$$

Selanjutnya berdasarkan Definisi 3.1 maka integral Henstock-Dunford pada E dapat dinyatakan seperti dalam teorema berikut.

Teorema 3.6. [8] Fungsi $f \in HD(E, \alpha)$ jika dan hanya jika terdapat fungsi aditif $F: \mathcal{J}(E) \rightarrow X$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga jika $A \subset E$ sel dan $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ partisi Perron δ -fine pada A berlaku

$$\left| \mathcal{D} \sum x^* (f(\bar{x})\alpha(D) - F(D)) \right| < \varepsilon$$

atau

$$\left| \mathcal{D} \sum x^* f(\bar{x})\alpha(D) - x^* F(D) \right| < \varepsilon.$$

■

Teorema 3.7. (Lemma Henstock) Fungsi $f \in HD(E, \alpha)$ dengan fungsi primitif F , yaitu untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga jika $A \subset E$ sel dan $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ partisi Perron δ -fine pada A berlaku

$$\left| \mathcal{D} \sum x^* (f(\bar{x})\alpha(D) - F(D)) \right| < \varepsilon$$

maka untuk setiap jumlahan bagian $\sum_1$ dari $\mathcal{D} \sum$ berlaku

$$\left| \mathcal{D} \sum_1 x^* f(\bar{x})\alpha(D) - x^* F(D) \right| < \varepsilon.$$

■

Locally Small Riemann Sums

Berikut ini akan ditunjukkan syarat perlu dan cukup suatu fungsi terintegral Henstock-Dunford pada sel E , yaitu memenuhi sifat locally small Riemann sums terhadap α pada E .

Definisi 3.8. [7] Diberikan X ruang Banach dan X^* ruang dualnya, volume α , sel $E \subset \mathbb{R}^n$, dan $f: E \rightarrow X$ fungsi terukur- α . Fungsi f dikatakan mempunyai sifat Locally Small Riemann Sums (LSRS) terhadap α pada sel E , ditulis $f \in LSRS(E, \alpha)$, jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, $x^* \in X^*$, dan $A \subset E$ sel terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap $\bar{y} \in E$ berlaku

$$\left| \mathcal{D} \sum x^* f(\bar{x})\alpha(D) \right| < \varepsilon$$

untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ pada sel $C \subset B(\bar{y}, \delta(\bar{y}))$ dan $\bar{y} \in C$.

Teorema 3.9. [7] Jika fungsi terukur- α $f \in HD(E, \alpha)$ maka $f \in LSRS(E, \alpha)$.

Bukti:

Diketahui fungsi terukur- α $f \in HD(E, \alpha)$ berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga jika $A \subset E$ sel dan partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ pada A berlaku

$$\left| \mathcal{D} \sum x^* (f(\bar{x})\alpha(D) - F(A)) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dengan F primitif-HD pada E .

Untuk setiap $\bar{y} \in E$, dipilih sel $C \subset B(\bar{y}, \delta(\bar{y}))$ sehingga berlaku

$$\left| x^* F(C) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Menurut Lemma Henstock, untuk setiap $\bar{y} \in E$ dan partisi Perron δ -fine pada $C \subset B(\bar{y}, \delta(\bar{y}))$ berlaku

$$\left| \mathcal{D} \sum x^* f(\bar{x})\alpha(D) \right| \leq \left| \mathcal{D} \sum x^* (f(\bar{x})\alpha(D) - F(C)) \right| + \left| x^* F(C) \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Teorema 3.10. [7] Jika fungsi terukur- α $f \in LSRS(E, \alpha)$ maka untuk setiap $x^* \in X^*$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga

$$\left\{ \mathcal{D} \sum x^* f(x) \alpha(D) : \mathcal{D} \right\}$$

dengan

$\mathcal{D}$ partisi Perron δ -fine pada E

adalah terbatas pada E .

Bukti:

Fungsi $f \in LSRS(E, \alpha)$ berarti untuk setiap $x^* \in X^*$ dan $A \subset E$ sel maka terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap $\bar{y} \in E$ berlaku

$$\left| \mathcal{D} \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) \right| < 1$$

untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ pada sel $C \subset B(\bar{y}, \delta(\bar{y}))$ dan $\bar{y} \in C$.

Dibentuk

$$\mathcal{F} = \{B(\bar{x}, \delta_*(\bar{x})) : \bar{x} \in E\}.$$

Diperoleh bahwa $\mathcal{F}$ merupakan liput terbuka bagian berhingga untuk E .

Karena E kompak maka terdapat liput bagian berhingga $\mathcal{G}$ untuk E , katakan $\{B(\bar{x}_i, \delta_*(\bar{x}_i)) : i = 1, 2, \dots, p\} \subset \mathcal{F}$.

Untuk setiap $\bar{x} \in E$ terdapat $k, 1 \leq k \leq p$ dengan $\bar{x} \in B(\bar{x}_k, \delta_*(\bar{x}_k))$.

Dibentuk fungsi positif δ pada E dengan rumus

$$\delta(\bar{x}) = \frac{1}{2} \min \left\{ d(\bar{x}, \partial(B(\bar{x}_k, \delta_*(\bar{x}_k)))) \right\}.$$

$\bar{x}$ titik interior $B(\bar{x}_k, \delta_*(\bar{x}_k)), 1 \leq k \leq p$.

Akibatnya untuk setiap $\bar{x} \in E$ terdapat suatu $j, 1 \leq j \leq p$ dengan sifat

$$B(\bar{y}, \delta(\bar{y})) \subseteq B(\bar{x}_j, \delta_*(\bar{x}_j)) \text{ dan}$$

$$\left| \mathcal{D}_j \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) \right| < 1$$

untuk setiap partisi Perron δ_* -fine

$\mathcal{D}_j$ pada sel $C \subset B(\bar{y}, \delta_*(\bar{y}))$ dan $\bar{x}_j \in C$.

Untuk setiap partisi $\mathcal{D} = \bigcup_{j=1}^p \mathcal{D}_j$

maka

$$\left| \mathcal{D} \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) \right| \leq \sum_{j=1}^p \left| \mathcal{D}_j \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) \right|$$

$$< p. \quad \blacksquare$$

Teorema 3.11. [7] Jika fungsi terukur- α $f \in LSRS(E, \alpha)$ maka $f \in HD(C, \alpha)$ untuk setiap sel $C \subset E^0$.

Bukti:

Fungsi terukur- α

$f \in LSRS(E, \alpha)$ maka untuk setiap

bilangan $\varepsilon > 0$, $x^* \in X^*$, dan $A \subset E$ sel

terdapat fungsi positif δ pada E sehingga berlaku

$$\left| \mathcal{D} \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) \right| < \varepsilon$$

untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ pada sel $D \subset B(\bar{y}, \delta(\bar{y}))$ dan $\bar{y} \in D$.

(i) Jika terdapat $\bar{y} \in E$ dengan $C \subset B(\bar{y}, \delta(\bar{y}))$ diperoleh :

Jika $\bar{y} \in C$ maka untuk setiap $x^* \in X^*$ dan dua partisi Perron δ -fine $\mathcal{D}_1 = \{(D, \bar{x})\}$ dan $\mathcal{D}_2 = \{(D, \bar{x})\}$ pada E berlaku

$$\left| \mathcal{D}_1 \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) - \mathcal{D}_2 \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) \right| < \varepsilon$$

Menurut kriteria Cauchy, $f \in HD(C, \alpha)$.

Jika $\bar{y} \notin C$ maka ada sel $G \subset B(\bar{y}, \delta(\bar{y}))$, sehingga $\bar{y} \in G$ dan $C \subset G$. Akibatnya untuk setiap $x^* \in X^*$ dan dua partisi Perron δ -fine $\mathcal{D}_1 = \{(D, \bar{x})\}$ dan $\mathcal{D}_2 = \{(D, \bar{x})\}$ pada G berlaku

$$\left| \mathcal{D}_1 \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) - \mathcal{D}_2 \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) \right| < \varepsilon$$

Menurut kriteria Cauchy, $f \in HD(G, \alpha)$.

Karena $C \subset G$ dan $f \in HD(G, \alpha)$ maka $f \in HD(C, \alpha)$.

(ii) Jika $C \not\subset B(\bar{y}, \delta(\bar{y}))$

maka ada fungsi positif δ pada E yang berakibat adanya partisi perron δ -fine $\mathcal{D} = \{(C_i, \bar{y}_i) : i = 1, 2, \dots, k\}$ pada sel C .
Jadi $f \in HD(C_i, \alpha), \forall i = 1, 2, \dots, k$. Jadi $f \in HD(C, \alpha)$. ■

Akibat 3.12. [7] Jika fungsi terukur- α $f \in LSRS(E, \alpha)$ maka $f \in HD(C, \alpha)$ untuk setiap himpunan sederhana $C \subset E^0$.

Teorema 3.13. [7] Jika fungsi terukur- α $f \in LSRS(E, \alpha)$ maka $f \in HD(E, \alpha)$.

Bukti:

Diketahui fungsi terukur- α $f \in LSRS(E, \alpha)$ maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, $x^* \in X^*$, dan $A \subset E$ sel terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap $\bar{y} \in E$ berlaku

$$\left| \mathcal{D} \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) \right| < \varepsilon$$

untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ pada sel $C \subset B(\bar{y}, \delta(\bar{y}))$ dan $\bar{y} \in C$.

Menurut Akibat di atas, $f \in HD(C, \alpha)$ untuk setiap himpunan sederhana $C \subset E^0$.

Barisan himpunan
 $\{E_i\}, E_i \cap E_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$ bersifat
 $E^0 = \bigcup E_i$.

Dengan demikian untuk bilangan
 $\varepsilon > 0$ di atas terdapat bilangan positif n_0
 dengan sifat

$$\alpha \left(\overline{E - \bigcup_{i \geq n_0} E_i} \right) < \varepsilon.$$

Untuk setiap i terdapat fungsi
 positif δ_i dengan sifat bahwa untuk setiap
 partisi Perron δ_i -fine pada E berlaku

$$\left| \mathcal{D} \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) - (H) \int_{E_i} x^* f \right| < \varepsilon,$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Didefinisikan fungsi positif δ
 dengan rumus

$$\delta(\bar{x}) = \begin{cases} \min \left\{ \delta^*(\bar{x}), \delta_i(\bar{x}), \frac{1}{2} d(\bar{x}, \partial E) \right\}, & \bar{x} \in \bigcup_{i < n_0} E_i \\ \min \left\{ \delta^*(\bar{x}), \delta_i(\bar{x}) \right\}, & \bar{x} \in \bigcup_{i \geq n_0} E_i \end{cases}$$

Untuk fungsi positif δ pada E
 dan bilangan positif n_0 bersifat untuk
 setiap $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ dengan
 $C_j = E_i \cap D$ untuk suatu $i \geq n_0$ dan suatu
 D dengan $\{(D, \bar{x})\}$ δ -fine dan $\bar{x} \in E^0$
 berlaku

(i) Jika $C_j = E_i$, untuk setiap
 $i \geq n_0$.

Karena $f \in HD(E_i, \alpha)$ dan

$$f \in HD(C_j, \alpha) \text{ maka } f \in HD\left(\bigcup_{j=1}^k C_j, \alpha\right).$$

Dipilih fungsi positif δ_* dengan
 $\delta_*(\bar{x}) = \min \{\delta_j(\bar{x}) : j = 1, 2, \dots, k\}$ maka
 untuk setiap partisi Perron δ_* -fine

$\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ pada $\bigcup_{j=1}^k C_j$ berlaku

$$\left| (H) \int_{\bigcup_{j=1}^k C_j} x^* f - \mathcal{D} \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) \right| < \varepsilon,$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{C} \sum (H) \int_C x^* f \right| \leq \\ & \sum_{j=1}^k \mathcal{D} \left| \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) \right| + \\ & \left| (H) \int_{\bigcup_{j=1}^k C_j} x^* f - \mathcal{D} \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) \right| \\ & < k\varepsilon + \varepsilon. \end{aligned}$$

Menurut sifat Cauchy,
 $f \in HD(E, \alpha)$.

(ii) Jika $C_j = E_i \cap D$, untuk
 $i \geq n_0$ dan suatu D dengan $\{(D, \bar{x})\}$ δ -
 fine dan $\bar{x} \in E^0$ maka $C_j \subset B(\bar{x}, \delta(\bar{x}))$.

Menurut Teorema 3.11. maka

$$f \in HD(C_j, \alpha). \quad \text{Akibatnya}$$

$$f \in HD\left(\bigcup_{j=1}^k C_j, \alpha\right).$$

Dipilih fungsi positif δ_1 dengan sifat $\delta_1(\bar{x}) \leq \delta(\bar{x})$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ_* -fine $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ pada

$$\bigcup_{j=1}^k C_j \text{ berlaku}$$

$$\left| (H) \int_{\bigcup_{j=1}^k C_j} x^* f - \mathcal{D} \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) \right| < \varepsilon$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{C} \sum (H) \int_C x^* f \right| \leq \\ & \sum_{j=1}^k \mathcal{D} \left| \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) \right| \\ & + \left| (H) \int_{\bigcup_{j=1}^k C_j} x^* f - \mathcal{D} \sum x^* f(\bar{x}) \alpha(D) \right| \\ & < k\varepsilon + \varepsilon. \end{aligned}$$

Menurut sifat Cauchy,

$$f \in HD(E, \alpha). \blacksquare$$

Akibat 3.14. [7] Fungsi terukur- α

$$f \in LSRS(E, \alpha) \text{ jika dan hanya jika}$$

$$f \in HD(E, \alpha). \blacksquare$$

Simpulan

Berdasarkan pembahasan di muka diperoleh kesimpulan bahwa syarat perlu dan cukup suatu fungsi terukur- α terintegral Henstock-Dunford pada sel $E \subset \mathbb{R}^n$ adalah fungsi tersebut mempunyai sifat locally small Riemann sums terhadap α pada E .

Untuk penelitian selanjutnya dapat dikaji mengenai sifat globally, functionally, dan essentially small Riemann sums fungsi terintegral Henstock-Dunford pada ruang Euclidean $\mathbb{R}^n$ beserta aplikasinya.

Daftar Pustaka

- Boccuto, A., Skvortsov, A.V., 2004, *Henstock-Kurzweil Type Integration of Riesz-Space-Valued Functions and Applications to Walsh Series*, Real Analysis Echange, 29(1): 419-439.
- Gordon, R.A., 1994, *The Integral of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, USA: Mathematical Society.
- Guoju, Ye., Tianqing, An., 2001, *On Henstock-Dunford and Henstock-Pettis Integrals*, IJMMS, 25(7): 467-478.
- Heikkila, S., 2011, *Monotone Convergence Theorems for Henstock-Kurzweil Integrable Functions and Applications*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 377(1): 286-295.
- Indrati, Ch. R., 2002, *Integral Henstock-Kurzweil di dalam Ruang Euclidean Berdimensi-n*, Disertasi,

- Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.
- Indrati, Ch.R., Surodjo, Budi., 2000, *Aplikasi Integral Henstock-Kurzweil pada Medan Vektor*, Yogyakarta: Lembaga Penelitian UGM.
- Lee P.Y., 1989, *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, Singapore: World Scientific.
- Saifullah, 2003, *Integral Henstock-Dunford pada Ruang Euclidean $\mathbb{R}^n$* , Tesis, Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.
- Schwabik, S., Guoju, Ye., 2004, *Topics in Banach Space Integration*, Manuscript in Preparation.