



ANALISIS PRAKSEOLOGI TERHADAP SOAL LIMIT PADA MATERI GEOMETRI: KASUS MEMBUAT DAN MEMBUKTIKAN DUGAAN

Dyah Ratri Aryuna*, Ponco Sujatmiko

¹⁾Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sebelas Maret

*dyahratri@staff.uns.ac.id

Abstract

Received:
28/09/2024

Accepted:
22/08/2025

Published:
22/08/2025

The experience of making and proving mathematical conjectures is valuable for students. The element of doubt in the conjecture gives students access to reasoning. All Calculus textbooks discuss limits, but most practice problems on the subject of limits are not specifically made as practice problems for making and proving conjectures. This study aims to describe problems on the subject of limits that can be used as practice questions to make and prove conjectures. The object of this research is the questions on the subject of limits related to geometry material in the book *Calculus*, 7th edition by James Stewart. This research method is a content analysis based on the praxeology model which consists of four elements of analysis, namely tasks, techniques, technology, and theory. The results show that the problems can be identified as exercises in making and proving conjectures, the steps in making and proving conjectures can be used to solve the problem, justification can be done to apply the steps in making and proving conjectures, and there is a theory used in justifying the steps in making and proving conjectures.

Keywords: analysis, praxeology, limit, conjecture

Abstrak

Pengalaman membuat dan membuktikan dugaan matematis adalah sesuatu yang berharga bagi mahasiswa. Adanya unsur keraguan pada dugaan memberikan akses pada mahasiswa untuk melakukan penalaran. Semua buku teks Kalkulus membahas limit, tetapi kebanyakan soal-soal latihan pada bahasan limit tidak dibuat khusus sebagai soal latihan membuat dan membuktikan dugaan. Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan soal pada bahasan limit yang dapat digunakan sebagai soal latihan membuat dan membuktikan dugaan. Objek dari penelitian ini adalah soal-soal pada bahasan limit yang berkaitan dengan materi geometri pada buku *Calculus*, 7th edition karangan James Stewart. Metode penelitian ini adalah analisis isi berdasarkan model prakseologi yang terdiri dari empat elemen analisis, yaitu tugas, teknik, teknologi, dan teori. Diperoleh hasil yang menunjukkan soal-soal tersebut dapat diidentifikasi sebagai soal latihan membuat dan membuktikan dugaan, dapat digunakan langkah-langkah dalam membuat dan membuktikan dugaan untuk menyelesaikan soal tersebut, dapat dilakukan justifikasi untuk menerapkan langkah-langkah dalam membuat dan membuktikan dugaan, dan terdapat teori yang digunakan dalam menjustifikasi langkah-langkah dalam membuat dan membuktikan dugaan.

Kata Kunci: analisis, prakseologi, limit, dugaan

1. Pendahuluan

Dugaan berperan penting dalam pengembangan matematika dan pembelajaran matematika. Formalisasi dugaan memungkinkan teori-teori matematika semakin berkembang (Mazur 1997). Menurut (Lannin et al. 2011) dugaan melibatkan penalaran matematis untuk membangun pernyataan yang secara sementara dianggap benar dan belum dipastikan kebenarannya. Unsur keraguan inilah yang membedakan dugaan

dengan bukti dan menyediakan akses untuk penalaran matematis lebih lanjut (Lesseig, 2016)

Dugaan adalah pernyataan yang didasarkan pada fakta empiris yang belum divalidasi. Merumuskan dugaan berarti membuat pernyataan tentang semua kemungkinan yang mungkin berdasarkan kasus tertentu tetapi dengan unsur keraguan (Cañadas et al. 2007). Lebih lanjut, tahapan menyusun dugaan menurut Morselli (2020) terdiri dari (1) mengeksplorasi masalah untuk menemukan sifat (2) merumuskan dan mengkomunikasikan dugaan (3) mengeksplorasi dugaan dan menemukan argumen teoritis yang memvalidasinya (4) membangun bukti yang harus dapat diterima oleh komunitas matematikawan.

Chevallard (2006) menyatakan bahwa prakseologi adalah studi yang dilakukan dalam kaitannya dengan tindakan dan perilaku manusia. Ini menunjukkan bahwa bahwa prakseologi tidak hanya berkaitan dengan apa yang orang lakukan dan bagaimana mereka melakukannya, tapi juga berkaitan dengan apa yang dipikirkan dan bagaimana mereka mereka memikirkannya. Putra (2019) , melihat prakseologi sebagai unit dasar yang dapat digunakan untuk menganalisis praktik dan pengetahuan ke dalam dua komponen yang saling terkait: praksis dan logos. Praksis atau blok praktis terdiri dari jenis tugas (T) dan teknik-teknik terkait (τ) untuk menyelesaikan setiap jenis tugas. Logo atau blok teoretis terdiri dari teknologi (θ) untuk menjustifikasi teknik dan teori (Θ) untuk menjelaskan teknologi. Jadi, sebuah prakseologi terdiri dari 4-tupel (T, τ , θ , Θ) di mana semua komponen terkait erat. Selanjutnya dalam penelitian Yuniarta et al.(2023) kerangka kerja analisis prakseologis yang dilakukan berpedoman pada tabel seperti berikut ini :

Tabel 1. Analisis Prakseologis

Tipe tugas (T)	Teknik (τ)	Teknologi (θ)	Teori (Θ)
Tipe tugas (masalah yang memiliki tujuan khusus untuk dipecahkan)	Cara seseorang untuk bertindak dalam menyelesaikan tipe tugas	Alasan untuk menampilkan teknik	Dasar atau referensi dari hadirnya teknologi

Dalam buku teks, tugas dapat bersumber dari materi tertentu dalam buku. Teori prakseologi yang digunakan untuk menganalisis buku teks berfokus pada analisis contoh dan soal dalam hal serangkaian tugas (T) yang akan dipelajari siswa, kumpulan teknik (τ) yang berfungsi untuk menyelesaikan menyelesaikan tugas-tugas (T), teknologi (θ) yang

digunakan untuk memperjelas dan menjustifikasi teknik (τ), dan teori (Θ) yang memvalidasi teknologi (Azzahra et al., 2022).

Kerangka kerja prakseologi telah digunakan dalam beberapa penelitian terkait buku teks kalkulus. Martín (2021) mengkaji penggunaan integral pada bidang teknik dengan menggunakan kerangka kerja prakseologi dalam menganalisis buku teks kalkulus. Hitier & Martín (2022) melakukan analisis prakseologis terhadap buku teks kalkulus diferensial dan buku teks mekanika untuk mengidentifikasi penggunaan turunan dalam kajian gerak. Dari penelitian-penelitian tersebut belum ada yang menggunakan kerangka kerja prakseologi untuk menganalisis soal-soal dalam buku kalkulus khususnya soal membuat dugaan.

Semua buku teks Kalkulus membahas materi limit, tetapi kebanyakan soal-soal latihan pada bahasan limit tidak dibuat khusus sebagai soal latihan membuat dan membuktikan dugaan. Salah satu buku teks yang sering digunakan pada mata kuliah Kalkulus adalah *Calculus, 7th edition* karangan James Stewart. Di dalam buku tersebut terdapat beberapa soal pada bahasan limit yang membutuhkan pengetahuan geometri untuk membuat dan membuktikan dugaan. Penelitian ini dimaksudkan untuk melakukan analisis prakseologi untuk melihat apakah soal-soal tersebut dapat digunakan sebagai soal latihan membuat dan membuktikan dugaan.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian analisis isi dengan pendekatan kualitatif. Objek dalam penelitian ini adalah soal-soal pada bahasan limit dalam buku *Calculus, 7th edition* karangan James Stewart yakni: (1) soal latihan 1.6, No 64, halaman 71; (2) soal pemecahan masalah No 8 halaman 102; dan (3) soal pemecahan masalah No 14 halaman 102. Selanjutnya soal-soal tersebut dinamakan sebagai tugas pertama (T_1), tugas kedua (T_2) dan tugas ke tiga (T_3). Analisis dilakukan dengan memperhatikan pedoman analisis prakseologis yang disusun seperti pada Tabel 2.

Tabel 2. Pedoman Analisis Prakseologis Soal Membuat dan Membuktikan Dugaan

Typo tugas (T)	Teknik (τ)	Teknologi (θ)	Teori (Θ)
Membuat dan membuktikan dugaan	1. Mengeksplorasi masalah untuk mendapatkan sifat	Justifikasi dari cara yang mungkin untuk	Teori yang mendasari justifikasi dari
	2. Merumuskan dan mengkomunikasikan dugaan	membuat dan membuktikan dugaan	cara yang mungkin untuk membuat dan membuktikan
	3. Mengeksplorasi dugaan dan		dugaan

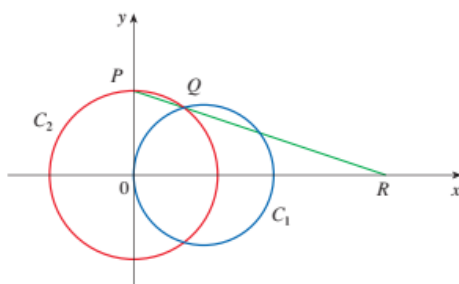
Tipe tugas (T)	Teknik (τ)	Teknologi (θ)	Teori (Θ)
	menemukan alasan teoritis yang memvalidasinya 4. Mengkonstruksi bukti		

3. Hasil dan Pembahasan

Ditinjau dari segi tipe tugas (T), T_1 , T_2 dan T_3 adalah tugas-tugas dengan tipe membuat dan membuktikan dugaan. Ditinjau dari segi teknik (τ), untuk menyelesaikan tugas tersebut digunakan langkah-langkah dalam membuat dan menyusun dugaan: (1) Mengeksplorasi masalah untuk mendapatkan sifat; (2) Merumuskan dan mengkomunikasikan dugaan; (3) Mengeksplorasi dugaan dan menemukan alasan teoritis yang memvalidasinya; (4) Mengkonstruksi bukti. Berikut akan dipaparkan teknologi (θ) dan teori (Θ) yang terkait dengan masing-masing T_1 , T_2 dan T_3 .

Deskripsi T_1 :

Gambar 1 menunjukkan suatu lingkaran tetap C_1 dengan persamaan $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ dan lingkaran C_2 dengan pusat titik asal O dan berjari-jari r yang dapat menyusut. Titik P adalah titik $(0, r)$, Q adalah titik potong bagian atas dari kedua lingkaran dan R adalah titik potong garis PQ dan sumbu- x . Apa yang terjadi dengan R jika C_2 menyusut, yakni jika $r \rightarrow 0^+$?

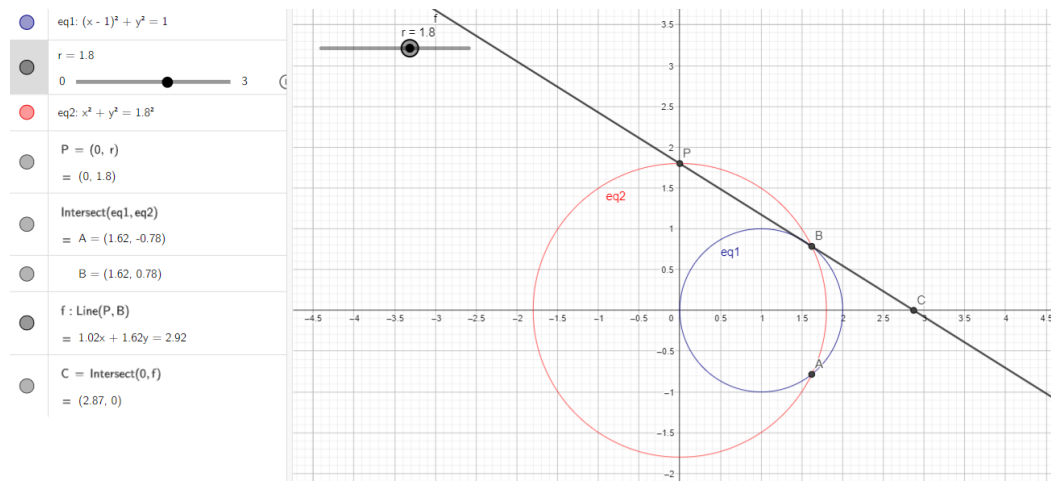


Gambar 1. Ilustrasi T1

(Stewart, 2012)

Teknologi (θ) yang digunakan untuk menyelesaikan T_1 adalah berupa justifikasi dari langkah-langkah membuat dan membuktikan dugaan sebagai berikut:

1. Menggambarkan grafik C_1 dan C_2 dalam sistem koordinat yang sama demikian sehingga grafik C_1 tetap dan grafik C_2 jari-jarinya berubah semakin kecil. Selanjutnya mengamati perubahan posisi R jika $r \rightarrow 0^+$. Pengamatan dapat dilakukan dengan bantuan geogebra seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.

Gambar 2. Ilustrasi T_1 untuk $P = (0, 1.8)$

Dapat diamati perubahan posisi R jika r semakin mendekati 0. Selanjutnya hasil pengamatan dapat ditampilkan pada Tabel 3.

Tabel 3. r dan koordinat R

r	Koordinat R
1,8	(2.87,0)
1,5	(3.32,0)
1,2	(3.60,0)
1	(3.73,0)
0,8	(3.83,0)
0,5	(3.94,0)
0,2	(3.99,0)

2. Dapat dibuat dugaan jika $r \rightarrow 0^+$ maka posisi R mendekati titik (4,0)
3. Diketahui $P(0, r)$ dan misal $R(x, 0)$. Dengan mengecilnya r , maka posisi P berubah dan akan mengakibatkan perubahan posisi R . Misal Q titik potong lingkaran C_1 dan C_2 dan S proyeksi dari titik Q pada sumbu- x . Hubungan antara x dan r , dapat diperoleh dari fakta kesebangunan ΔPOR dan ΔQSR atau dari fakta ΔPRO dipotong oleh garis QS dengan $QS \parallel PO$.
4. Misal $Q(x_Q, y_Q)$ dan $S(x_Q, 0)$. Karena Q titik potong lingkaran C_1 dan C_2 , maka berlaku $x_Q^2 + y_Q^2 = r^2$ dan $(x_Q - 1)^2 + y_Q^2 = 1$. Diperoleh $x_Q = \frac{1}{2}r^2$ dan $y_Q = \sqrt{r^2 - x_Q^2} = \frac{1}{2}r\sqrt{4 - r^2}$. Karena $\Delta POR \sim \Delta QSR$, maka $\frac{PO}{QS} = \frac{OR}{SR}$ sehingga $\frac{r}{y_Q} = \frac{x}{x - x_Q}$, $r \neq 0$. Menggunakan $x_Q = \frac{1}{2}r^2$ dan $y_Q = \frac{1}{2}r\sqrt{4 - r^2}$ diperoleh $x = \frac{r^2}{2 - \sqrt{4 - r^2}}$

Cara lain:

ΔPRO dipotong oleh garis QS dengan $QS \parallel PO$, maka $\frac{RS}{SO} = \frac{RQ}{QP}$ sehingga

$$\frac{x-x_Q}{x_Q} = \frac{\sqrt{(x-x_Q)^2+y_Q^2}}{\sqrt{x_Q^2+(y_Q-r)^2}}, \quad r \neq 0. \text{ Menggunakan } x_Q = \frac{1}{2}r^2 \text{ dan } y_Q = \frac{1}{2}r\sqrt{4-r^2}$$

diperoleh $x = \frac{r^2}{2-\sqrt{4-r^2}}$. Misal $x(r) = \frac{r^2}{2-\sqrt{4-r^2}}$, maka $\lim_{r \rightarrow 0^+} x(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^2}{2-\sqrt{4-r^2}} = 4$

Jadi posisi R mendekati titik $(4,0)$, jika r menyusut

Teori (Θ) yang diperlukan untuk menyelesaikan T_1 berdasarkan teknologi yang digunakan adalah pengertian lingkaran, persamaan lingkaran, titik potong dua kurva, titik potong dengan sumbu- x dan Teorema 3.1.

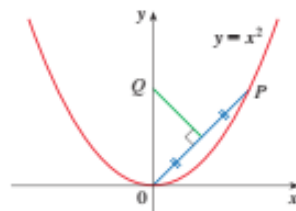
Teorema 3.1: Teorema Proporsionalitas Segitiga

Jika sebuah garis yang sejajar dengan sisi sebuah segitiga memotong dua sisi lainnya, maka garis itu membagi sisi-sisi tersebut secara proporsional

(Burger et al. 2007)

Deskripsi T_2 :

Gambar 3 menunjukkan suatu titik P pada parabola $y = x^2$ dan titik Q di mana garis bagi OP beririsan dengan sumbu- y . Seraya P menelusuri parabola mendekati titik pusat O , apa yang terjadi dengan Q ? Apakah ada posisi yang membatasi?

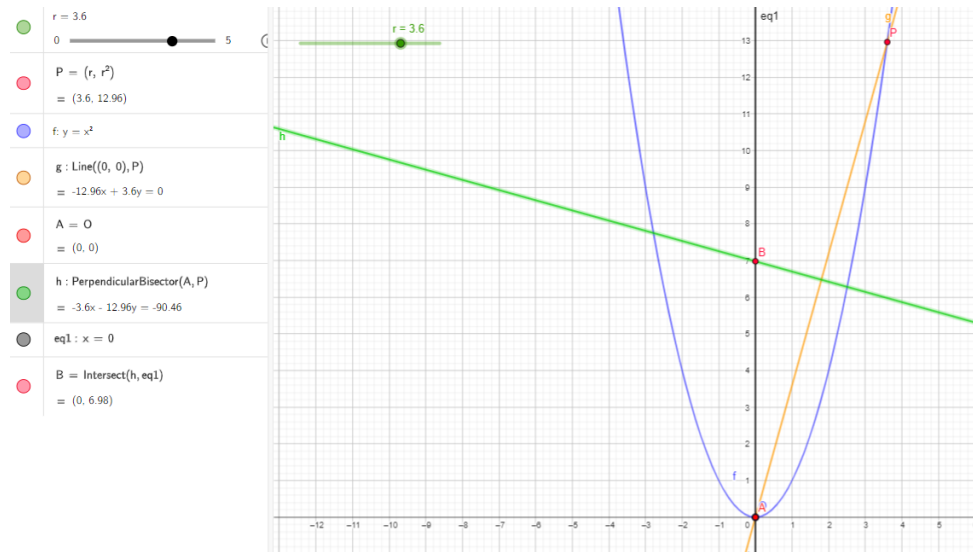


Gambar 3. Ilustrasi T_2

(Stewart, 2012)

Teknologi (θ) yang digunakan untuk menyelesaikan T_1 adalah berupa justifikasi dari langkah-langkah yang mungkin untuk membuat dan membuktikan dugaan sebagai berikut:

1. Menggambar kurva $y = x^2$ pada sistem koordinat dan mengamati perubahan posisi titik Q ketika titik P mendekati titik pusat O . Pengamatan dapat dilakukan dengan bantuan geogebra seperti pada Gambar 4.

Gambar 4. Ilustrasi T_2 untuk $P(3.6, 12.96)$

Dapat diamati perubahan posisi Q jika P semakin mendekati $O(0,0)$. Selanjutnya hasil pengamatan dapat ditampilkan pada Tabel 4.

Tabel 4. Koordinat P dan koordinat Q

Koordinat P	Koordinat Q
(3.6,12.96)	(0,6.98)
(3,9)	(0,5)
(2.5,6.25)	(0,3.63)
(1.5,4.84)	(0,1.63)
(0.5,0.25)	(0,0.63)
(0.25,0.06)	(0,0.53)
(0.1,0.001)	(0,0.51)

2. Dapat dibuat dugaan jika titik P mendekati titik $O(0,0)$ menelusuri kurva $y = x^2$ maka posisi titik Q mendekati titik $(0,0.5)$
3. Misal $P(x, x^2)$ dan $Q(0, y)$. Jika x mendekati 0 maka posisi titik Q akan berubah. Hubungan antara y dan x dapat diperoleh dari fakta bahwa Q terletak pada garis bagi tegak lurus segmen OP
4. Misal S titik tengah segmen OP , $S(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}x^2)$ maka S terletak pada garis bagi segmen garis OP . Misal l segmen garis OP dan k garis bagi segmen OP , maka $l \perp k$ sehingga hasil kali gradien l dan k adalah -1 . Misal m_l gradien l dan m_k gradien k , maka $m_l m_k = -1$ sehingga $\frac{x^2-0}{x-0} \frac{y-\frac{1}{2}x^2}{0-\frac{1}{2}x} = -1, x \neq 0$, diperoleh $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

Cara lain

Titik Q terletak pada garis bagi sehingga berjarak sama terhadap O dan P , yakni $|QP| = |QO|$ sehingga $\sqrt{(y - x^2)^2 + (0 - x)^2} = y, x \neq 0$, diperoleh $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

Misal $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$, maka $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Jadi, jika titik P mendekati titik pusat O menelusuri parabola $y = x^2$ maka Q mendekati titik $(0, \frac{1}{2})$

Teori (Θ) yang diperlukan untuk menyelesaikan T_2 berdasarkan teknologi yang digunakan adalah pengertian garis bagi tegak lurus (*perpendicular bisector*), titik tengah segmen garis, titik potong dengan sumbu- y dan Teorema 3.2 dan 3.3.

Teorema 3.2: Teorema Garis Tegak Lurus

Pada sebuah bidang koordinat, dua garis nonvertikal tegak lurus jika dan hanya jika hasil kali kemiringannya adalah -1. Garis vertikal dan horizontal tegak lurus

(Burger et al. 2007)

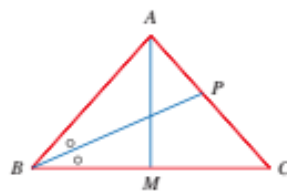
Teorema 3.3: Teorema Garis Bagi Tegak Lurus

Titik X berada pada garis bagi tegak lurus dari sebuah segmen jika dan hanya jika titik X berjarak sama dari titik-titik ujung dari segmen tersebut.

(Burger et al. 2007)

Deskripsi T_3 :

Gambar 5 menunjukkan suatu segitiga sama kaki ABC dengan $\angle B = \angle C$. Garis bagi sudut B beririsan dengan sisi AC pada titik P . Misal alas BC dibuat tetap tetapi tinggi $|AM|$ dari segitiga mendekati 0, apakah A mendekati titik tengah M dari BC ? Apa yang terjadi dengan P selama proses tersebut? Apakah ada posisi yang membatasi?



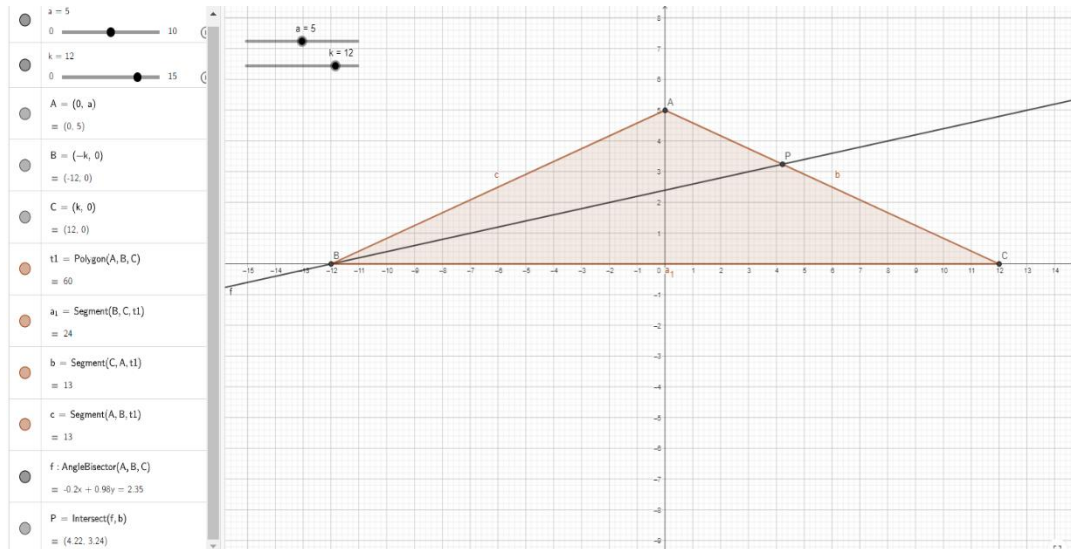
Gambar 5. Ilustrasi untuk Soal No 3

(Stewart, 2012)

Teknologi (θ) yang digunakan untuk menyelesaikan T_1 adalah berupa justifikasi dari langkah-langkah yang mungkin untuk membuat dan membuktikan dugaan sebagai berikut:

1. Dengan menggunakan geogebra, digambar suatu segitiga sama kaki ABC dengan $\angle B = \angle C$ pada sistem koordinat demikian sehingga sisi AB terletak pada sumbu- x dan garis tinggi yang tegak sisi AB berimpit dengan sumbu- y . Garis bagi sudut B

berpotongan dengan sisi AC pada titik P . Selanjutnya diamati perubahan posisi titik P , jika alas BC dibuat tetap tetapi tinggi $|AM|$ dari segitiga mendekati 0. Pengamatan dapat dilakukan dengan bantuan geogebra seperti pada Gambar 6.



Gambar 6. Ilustrasi T_3 untuk $A(0,5)$

Dapat diamati perubahan posisi P jika A semakin mendekati $O(0,0)$ dengan alas BC tetap. Selanjutnya hasil pengamatan dapat ditampilkan pada Tabel 5.

Tabel 5. Nilai $|AM|$ dan koordinat P untuk $B(-12,0)$ dan $C(12,0)$

$ AM $	Koordinat P
4	(4.14,2.62)
2	(4.04,1.33)
1.5	(4.02,1)
1.2	(4.01,0.8)
1	(4.01,0.67)
0.8	(4.01,0.53)
0.5	(4,0.33)

- Misal $B = (-k, 0)$ dan $C = (k, 0)$ tetap (k konstanta). Jika $|AM| \rightarrow 0$ maka titik P mendekati titik $(\frac{1}{3}k, 0)$
- Misal $A(0, t)$, dan $P(x, y)$. Jika t mendekati 0, maka posisi titik P akan berubah. Hubungan antara x dan t dapat diperoleh dari fakta bahwa $\triangle ABC$ sama kaki dengan $\angle B = \angle C$ dan BP adalah segmen garis bagi sudut B .
- Misal $B = (-k, 0)$ dan $C = (k, 0)$, untuk suatu konstanta k . Misal $A(0, t)$ dan $P(x, y)$. Karena $\triangle ABC$ sama kaki dengan $\angle B = \angle C$ maka $AB = AC$. Karena AM garis tinggi ($AM \perp BC$) maka $\triangle AMC$ adalah segitiga siku-siku, berlaku $AC^2 = AM^2 + MC^2 = t^2 + k^2$ sehingga $AC = \sqrt{t^2 + k^2}$. Misal $Q(0, y)$ dan

$R(x, 0)$. Karena $\frac{AM}{PR} = \frac{CM}{CR}$ maka $\frac{t}{y} = \frac{k}{k-x}$ sehingga $y = \frac{t(k-x)}{k}$. Karena

$$AP^2 = AQ^2 + QP^2 = (t-y)^2 + x^2 = \left(t - \frac{t(k-x)}{k}\right)^2 + x^2 \quad \text{maka} \quad AP = \frac{\sqrt{t^2+k^2}}{k}x.$$

Berdasarkan teorema garis bagi sudut, $\frac{AP}{CP} = \frac{BA}{BC}$ maka $AP \cdot BC = CP \cdot BA$ sehingga

$$\frac{\sqrt{t^2+k^2}}{k}x \cdot 2k = \left(\sqrt{t^2+k^2} - \frac{\sqrt{t^2+k^2}}{k}x\right)\sqrt{t^2+k^2} \quad \text{dan diperoleh} \quad x = \frac{\sqrt{t^2+k^2}}{\left(2 + \frac{\sqrt{t^2+k^2}}{k}\right)}.$$

Misal $x(t) = \frac{\sqrt{t^2+k^2}}{\left(2 + \frac{\sqrt{t^2+k^2}}{k}\right)}$ maka $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2+k^2}}{\left(2 + \frac{\sqrt{t^2+k^2}}{k}\right)} = \frac{k}{3}$. Jadi jika $B = (-k, 0)$

dan $C = (k, 0)$ tetap (k konstanta), maka $|AM| \rightarrow 0$ dan titik P mendekati titik $\left(\frac{1}{3}k, 0\right)$. Dengan demikian jika tinggi $|AM|$ dari segitiga mendekati 0, A mendekati titik tengah M dari BC dan P mendekati titik R demikian sehingga $BR:RC = 2:1$

Teori (Θ) yang diperlukan untuk menyelesaikan T_3 berdasarkan teknologi yang digunakan adalah pengertian segitiga sama kaki, garis bagi sudut, teorema pythagoras dan Teorema 3.4, 3.5, dan 3.6.

Teorema 3.4: Teorema Segitiga Sama Kaki

Sisi-sisi segitiga sama panjang jika dan hanya jika sudut-sudut di depan sisi-sisi sama besar.

(Burger et al. 2007)

Teorema 3.5: Teorema Garis Bagi Sudut

Titik C berada pada garis bagi dari suatu sudut jika dan hanya jika titik C berjarak sama dari kaki-kaki sudut

(Burger et al. 2007)

Teorema 3.6: Teorema Garis Bagi Sudut Segitiga

Garis bagi sudut dari sebuah segitiga membagi sisi dihadapannya menjadi dua segmen yang panjangnya sebanding dengan panjangnya dua sisi lainnya.

(Burger et al. 2007)

Hasil analisis prakseologi terhadap soal-soal limit pada materi geometri yang terdapat pada buku *Calculus, 7th edition* karangan James Stewart menunjukkan soal-soal tersebut memungkinkan untuk digunakan sebagai soal untuk melatih mahasiswa membuat dan membuktikan dugaan. Dalam menyelesaikannya dapat digunakan langkah-langkah membuat dugaan seperti yang dikemukakan oleh (Morselli, 2020).

Prakseologi tidak hanya digunakan untuk menganalisa pengetahuan matematis tapi juga pengetahuan didaktik. Tipe tugas dari prakseologi didaktis merujuk pada

bagaimana guru mengajarkan matematika, seperti pada bagaimana mengorganisasi situasi belajar untuk menerapkan teknik dalam mengajar. Blok teknologi dan teori pada prakseologi didaktik terkait dengan justifikasi teknik berdasarkan pengalaman dan pengetahuan (Putra, Z.H dan Witri 2017). Hasil analisis prakseologi soal-soal pada penelitian ini dapat menjadi bahan untuk mengembangkan desain pembelajaran menggunakan analisis prakseologis didaktis. Pembelajaran misalnya dapat dilakukan dengan cara : (i) memberikan soal membuat dugaan (ii) mengorganisasi situasi belajar sehingga mahasiswa menerapkan langkah-langkah membuat dugaan (iii) mendorong eksplorasi – dapat dengan menggunakan platform yang membantu mendapatkan ide-ide membuat dugaan dan memberikan ruang untuk terjadinya diskusi untuk membuat justifikasi pada setiap langkah membuat dugaan dan (iv) meminta dasar teori untuk setiap justifikasi yang dibuat.

Geogebra dapat digunakan untuk membantu membuat dugaan sehingga memungkinkan penggunaan teknologi untuk memperkaya pengalaman belajar mahasiswa. Hal tersebut sejalan dengan perkembangan penggunaan teknologi dalam pembelajaran saat ini. Hanifah et al.(2025) mengemukakan bahwa pada beberapa penelitian yang diulas dalam tinjauan literatur sistematis terdapat tren penelitian yang menunjukkan peran teknologi dalam menyediakan platform interaktif dan dinamis untuk mengeksplorasi ide-ide matematika abstrak. Keterkaitan dengan materi lain selain materi kalkulus memungkinkan dikembangkan pembelajaran yang memberi ruang bagi mahasiswa untuk melakukan koneksi matematis. Secara spesifik, García dan Flores (2021) menyarankan penggunaan visualisasi untuk mengembangkan koneksi matematis, dalam rangka meningkatkan pemahaman matematika.

4. Kesimpulan dan Saran

Hasil analisis prakseologi menunjukkan soal-soal limit yang berkaitan dengan materi geometri dalam buku *Calculus*, 7th edition oleh James Stewart dari segi tugas (T) dapat diidentifikasi sebagai soal latihan membuat dan membuktikan dugaan, dari segi teknik (τ) dapat digunakan langkah-langkah dalam membuat dan membuktikan dugaan untuk menyelesaikan soal tersebut, dari segi teknologi (θ) dapat dilakukan justifikasi untuk menerapkan langkah-langkah dalam membuat dan membuktikan dugaan, dan dari segi (Θ) terdapat teori yang digunakan dalam menjustifikasi langkah-langkah dalam membuat dan membuktikan dugaan. Hasil itu menunjukkan soal-soal tersebut memungkinkan untuk digunakan sebagai latihan membuat dan membuktikan dugaan.

Terkait hasil penelitian, dapat dikemukakan saran untuk melakukan pengembangan pembelajaran yang memberikan kesempatan mahasiswa berlatih membuat dan membuktikan dugaan berbantuan visualisasi dengan memanfaatkan teknologi. Desain pembelajaran dapat dibuat menggunakan analisis prakseologis didaktis berdasarkan analisis prakseologis terhadap tugas yang disajikan dalam pembelajaran tersebut.

Pustaka

- Azzahra, N., Herman, T., & Dasari, D. (2022). Analysis of Inverse Proportion in Mathematics Textbook Based on Praxeological Theory. *Jurnal Analisa*, 8(2), 152–167. <https://doi.org/10.15575/ja.v8i2.22679>
- Burger, E. B., Chard, D. J., Hall, E. J., Kennedy, P. A., Leinwand, S. J., & Renfro, F. L. (2007). *Holt Geometry Texas*. Holt Rinehart & Winston.
- Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D., & Yevdokimov, O. (2007). The Conjecturing Process: Perspectives in Theory and Implications in Practice. In *Journal of Teaching and Learning* (Vol. 5, Issue 1). <https://doi.org/10.22329/jtl.v5i1.82>
- Chevallard, Y. (2006). Steps Towards a New Epistemology in Mathematics Education. *Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 21–30.
- García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2021). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. *Mathematics Education Research Journal*, 33(1), 1–22. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00286-x>
- González-Martín, A. S. (2021). $VB-VA=\int ABf(x)dx$. The Use of Integrals in Engineering Programmes: a Praxeological Analysis of Textbooks and Teaching Practices in Strength of Materials and Electricity and Magnetism Courses. In *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* (Vol. 7, Issue 2, pp. 211–234). <https://doi.org/10.1007/s40753-021-00135-y>
- Hanifah, U., Budayasa, I. K., & Sulaiman, R. (2025). Technology, pedagogy, and content knowledge in mathematics education: a systematic literature review. *Journal of Education and Learning*, 19(1), 579–586. <https://doi.org/10.11591/edulearn.v19i1.21816>
- HastiYunianta, T. N., Suryadi, D., Dasari, D., & Herman, T. (2023). Textbook praxeological-didactical analysis: Lessons learned from the Indonesian mathematics textbook. *Journal on Mathematics Education*, 14(3), 503–524. <https://doi.org/10.22342/jme.v14i3.pp503-524>
- Hitier, M., & González-Martín, A. S. (2022). Derivatives and the Study of Motion at the

- Intersection of Calculus and Mechanics: a Praxeological Analysis of Practices at the College Level. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 8(2), 293–317. <https://doi.org/10.1007/s40753-022-00182-z>
- Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing Essential Understanding of Mathematical Reasoning for Teaching Mathematics in Prekindergarten–Grade 8*. The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- Lesseig, K. (2016). Conjecturing, generalizing and justifying: Building theory around teacher knowledge of proving. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 17(3). <https://doi.org/https://doi.org/10.4256/ijmtl.v17i3.27>
- Mazur, B. (1997). Conjecture. *Synthese*, 111(2), 197–210.
- Morselli, F. (2020). Use of examples in conjecturing and proving: an exploratory study. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 185–192. <https://doi.org/10.1515/9783112352960>
- Putra, Z.H, Witri, G. (2017). Anthropological Theory of the Didactic (ATD) a New Research perspective on Didactic Mathematics in Indonesia. *Jurnal Pendidikan Guru*, 2(1), 221–227.
- Putra, Z. H. (2019). Danish Pre-service Teachers' Mathematical and Didactical Knowledge of Operations with Rational Numbers. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(1), 619–632. <https://doi.org/10.29333/iejme/5775>
- Stewart, J. (2012). *Calculus* (7th ed.). Brooks/Cole.

